

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1986)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE  
**Autor:** Raymond, Xavier Saint  
**Kapitel:** 2.4. Construction des fonctions  $u$  et  $a$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55077>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Nous avons alors  $v_k = \exp [F_k + iG_k]$ , et  $F_k$  et  $G_k$  vérifient (2.10) et (2.11) grâce à ces formules qui les définissent et à (2.4), (2.5), (2.6), (2.13) ( $j=l=0$ ) et (2.15).

#### 2.4. CONSTRUCTION DES FONCTIONS $u$ ET $a$

Par un calcul élémentaire nous voyons que pour  $y \in Y$  et  $k$  assez grand,  $\delta_{k+1} < \delta_k - \frac{3}{4}l_k < m_k + e_k(y) < \delta_{k+1} + \frac{3}{4}l_{k+1} < \delta_k$ . Nous choisissons alors une fonction à valeurs réelles  $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$  telle que

$$\chi(\tau) = 1 \quad \text{pour } \tau \in [-3/4, 3/4],$$

$$\text{supp } \chi \subset [-1, 1] \quad \text{et } \chi(\tau) \in [0, 1] \quad \text{pour } \tau \in [-1, 1];$$

puis avec  $\chi_k(t) = \chi(l_k^{-1}(t - \delta_k))$  nous posons

$$\begin{cases} u(y, t) = \sum_{k \geq k_0} \chi_k(t) u_k(y, t) & \text{pour } (y, t) \in Y \times ]0, \delta_{k_0}[ , \\ u(y, t) = 0 & \text{pour } (y, t) \in Y \times ]-\delta_{k_0}, 0] \\ \begin{cases} a(y, t) = -(L + c_0)u(y, t)/u(y, t) & \text{pour } u(y, t) \neq 0, \\ a(y, t) = 0 & \text{pour } u(y, t) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

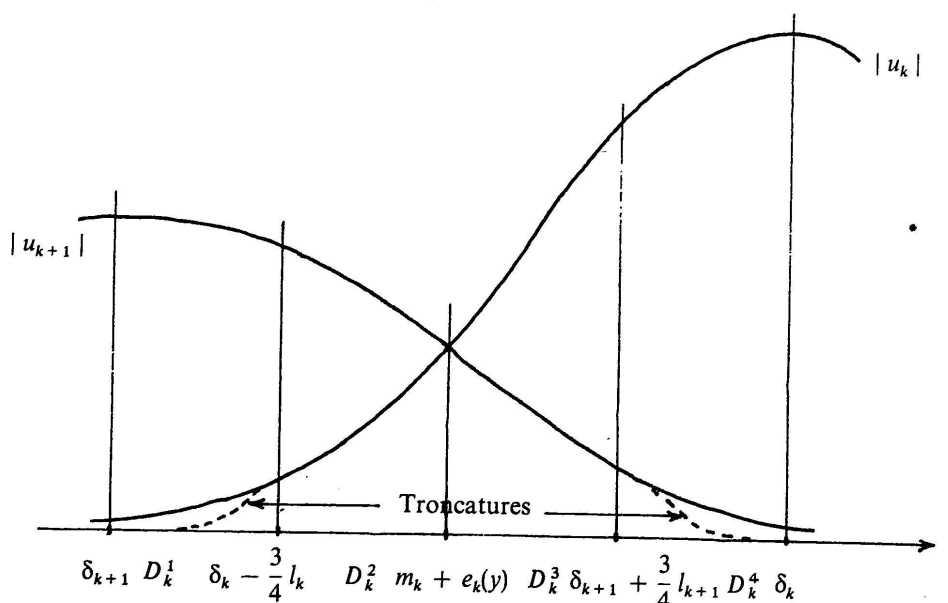


FIGURE 2.2.

Profils des fonctions  $u_k$  et  $u_{k+1}$  pour  $t \in [\delta_{k+1}, \delta_k]$ .

*Régularité de la fonction  $u$ .* Remarquons d'abord qu'une telle fonction  $u$  est  $C^\infty$ . En effet, pour  $t > 0$ ,  $u$  est somme d'au plus deux termes non nuls qui sont des fonctions  $C^\infty$ , et  $u$  est donc  $C^\infty$  dans  $Y \times ]0, \delta_{k_0}[$ ; pour voir que  $u$  est  $C^\infty$  au voisinage de  $t = 0$ , il suffit de montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,

$$(2.16) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{Y \times ]\delta_{k+1}, \delta_{k-1}[} \left| \partial^\alpha (\chi_k u_k) \right| \right) = 0.$$

Or tous les éléments ayant servi à la construction de  $u_k$  se comportent comme des puissances de  $k$  ainsi que leurs dérivées; on peut donc écrire

$$|\partial^\alpha (\chi_k u_k)| \leq C_\alpha k^{v_\alpha} \exp(-\gamma_k + \operatorname{Re} \varphi_k).$$

Mais  $-\gamma_k(y) \sim -\frac{3}{20} \beta(y, 0, 0) k^{5/4}$ , et

$$|\operatorname{Re} \varphi_k| \leq \frac{4}{3} \delta_k^{-5} l_k^2 \beta(y, 0, 0) \leq k^{1/4} \beta(y, 0, 0)$$

pour  $k$  suffisamment grand et  $y \in Y$ ; comme  $\beta(y, 0, 0) > 0$  pour  $y \in Y$ , cela donne (2.16).

*Détermination des supports des fonctions  $u$  et  $a$ .* D'après (2.10), nous savons que  $|v_k(y, t)| < 1$  pour  $t \in [\delta_{k+1}, m_k + e_k(y)[$ , et comme dans ce même domaine  $u = u_{k+1} + \chi_k u_k$ , soit  $u = u_{k+1}(1 + \chi_k v_k)$ , on en déduit que  $u$  ne s'annule pas; on démontrerait de même que  $u$  ne s'annule pas pour  $t \in ]m_{k+1} + e_{k+1}(y), \delta_{k+1}]$ , ni donc dans le domaine

$$D = \{(y, t) \in Y \times ]-\delta_{k_0}, \delta_{k_0}[ \mid t > 0 \text{ et } t \neq m_k + e_k(y) \text{ pour tout } k \geq k_0\}$$

qui est dense dans  $Y \times [0, \delta_{k_0}[$ ; il en résulte que  $\operatorname{supp} u = Y \times [0, \delta_{k_0}[$ , et par définition de  $a$ , on a  $\operatorname{supp} a \subset \operatorname{supp} u$ . Pour obtenir (1.1), il ne nous reste plus qu'à montrer que  $a$  est  $C^\infty$  dans  $Y \times ]-\delta_{k_0}, \delta_{k_0}[$ .

*Régularité de la fonction  $a$ .* Dans le domaine  $D$  défini ci-dessus,  $u \neq 0$  donc la fonction  $a$  est définie par la formule  $a = -(L + c_0)u/u$ ; il en résulte que  $a$  est  $C^\infty$  dans  $D$ . Pour  $t$  voisin de  $m_k + e_k(y)$ ,  $u = u_{k+1} + u_k$ , donc pour  $u_{k+1} + u_k \neq 0$ ,  $a = -(L + c_0)u/u = -(r_{k+1}u_{k+1} + r_k u_k) / (u_{k+1} + u_k)$ ; en particulier,

$$\begin{cases} a = -(r_{k+1} + r_k v_k) / (1 + v_k) & \text{si } t < m_k + e_k(y) (\Leftrightarrow |v_k| < 1) \\ a = -(r_{k+1} v_k^{-1} + r_k) / (1 + v_k^{-1}) & \text{si } t > m_k + e_k(y) (\Leftrightarrow |v_k^{-1}| < 1). \end{cases}$$

Dans la première de ces deux formules, le numérateur est plat sur  $t = m_k + e_k(y)$  à cause de (2.8), et le dénominateur vérifie

$$|1 + v_k| \geq 1 - |v_k| \geq \frac{\beta_0 k^2}{12} (m_k + e_k(y) - t)$$

d'après (2.10) et en utilisant l'inégalité  $e^F \leq 1 + \frac{F}{4}$  pour  $F \in [-2, 0]$ . L'expression  $(r_{k+1} + r_k v_k)/(1 + v_k)$  définit donc une fonction plate sur  $t = m_k + e_k(y)$ , et comme il en est de même pour l'autre expression, nous avons obtenu que, même si  $u$  s'annule en certains points de  $t = m_k + e_k(y)$  (ce qui entraîne que  $a = 0$  par définition de  $a$ ), la fonction  $a$  est  $C^\infty$  dans  $Y \times ]0, \delta_{k_0}[$ .

Pour montrer que  $a$  est  $C^\infty$  pour  $t$  voisin de 0, il nous faut estimer les dérivées de  $a$  sur  $Y \times [\delta_{k+1}, \delta_k]$  lorsque  $k$  tend vers l'infini. Pour cela, nous étudions  $a$  successivement sur les quatre intervalles schématisés sur la figure 2.2.

1. Sur  $D_k^1 = \{(y, t) \mid \delta_{k+1} \leq t \leq \delta_k - \frac{3}{4} l_k\}$ , on a

$$F_k(y, t) \leq \frac{\beta_0 k^2}{3} \left( \delta_k - \frac{3}{4} l_k - m_k - e_k(y) \right) \leq -\frac{\beta_0}{50} k^{1/4}$$

pour  $k$  assez grand d'après (2.10). En utilisant aussi (2.11), on obtient que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  et tout  $v \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{D_k^1} |k^v \partial^\alpha v_k| \right) = 0.$$

Sur  $D_k^1$ ,  $u$  et  $a$  sont données par les formules  $u = u_{k+1} + \chi_k u_k$  et  $a = -(L + c_0)u/u$ , d'où

$$\begin{aligned} a &= - \left[ (L + c_0)u_{k+1} + \chi_k (L + c_0)u_k + l_k^{-1} \chi' \left( \frac{t - \delta_k}{l_k} \right) u_k \right] / u \\ &= - \left( r_{k+1} + \left[ \chi_k r_k + l_k^{-1} \chi' \left( \frac{t - \delta_k}{l_k} \right) \right] v_k \right) / (1 + \chi_k v_k). \end{aligned}$$

On en déduit, à l'aide de l'estimation précédente et de (2.9) que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{D_k^1} |\partial^\alpha a| \right) = 0.$$

2. Sur  $D_k^2 = \{(y, t) \mid \delta_k - \frac{3}{4}l_k \leq t < m_k + e_k(y)\}$ , on a  $F_k(y, t) < 0$  d'après (2.10) d'où  $|v_k| < 1$ . Comme  $u = u_{k+1} + u_k \neq 0$ , on peut alors écrire

$$\begin{aligned} a &= - (L + c_0)u/u = - (r_{k+1}u_{k+1} + r_k u_k) / (u_{k+1} + u_k) \\ &= - (r_{k+1} + r_k v_k) / (1 + v_k), \end{aligned}$$

et toutes les dérivées d'une telle expression peuvent être estimées par des sommes de puissances de  $k$  avec des coefficients de la forme  $(\partial^\alpha r_{k(+1)}) / (1 + v_k)^\nu$ . Mais grâce à (2.10)

$$|1 + v_k| \geq 1 - |v_k| \geq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\beta_0 k^2}{12} (m_k + e_k(y) - t) \right\}$$

car  $e^F \leq \frac{1}{2}$  pour  $F \in ]-\infty, -1]$  et  $e^F \leq 1 + \frac{F}{4}$  pour  $F \in [-2, 0]$ , et le théorème des accroissements finis donne pour  $(y, t) \in D_k^2$

$$\begin{aligned} &|(\partial^\alpha r_{k(+1)}(y, t)) / (m_k + e_k(y) - t)^\nu| \\ &\leq \sup \{ |\partial^{\alpha+\beta} r_{k(+1)}(y, t)| \mid (y, t) \in D_k^2 \text{ et } |\beta| \leq \nu \} \end{aligned}$$

puisque  $r_{k(+1)}$  est plate sur  $t = m_k + e_k(y)$  (cf. (2.8)). On obtient donc en utilisant (2.9) que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{D_k^2} |\partial^\alpha a| \right) = 0.$$

3. Sur  $D_k^3 = \{(y, t) \mid m_k + e_k(y) < t \leq \delta_{k+1} + \frac{3}{4}l_{k+1}\}$  on procède comme sur  $D_k^2$  en échangeant les rôles de  $u_k$  et  $u_{k+1}$ , et donc en utilisant  $v_k^{-1}$  à la place de  $v_k$ .

4. Sur  $D_k^4 = \{(y, t) \mid \delta_{k+1} + \frac{3}{4}l_{k+1} \leq t \leq \delta_k\}$  on procède comme sur  $D_k^1$  en échangeant les rôles de  $u_k$  et  $u_{k+1}$ .

### CHAPITRE 3: TECHNIQUES D'UNICITÉ

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment prouver certaines inégalités de Carleman, et comment les utiliser pour obtenir l'unicité de Cauchy. En guise d'exemple, nous donnons une démonstration complète pour le cas elliptique (3.1).