

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1986)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE  
**Autor:** Raymond, Xavier Saint  
**Kapitel:** Chapitre 3: Techniques d'unicité  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55077>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

2. Sur  $D_k^2 = \{(y, t) \mid \delta_k - \frac{3}{4}l_k \leq t < m_k + e_k(y)\}$ , on a  $F_k(y, t) < 0$  d'après (2.10) d'où  $|v_k| < 1$ . Comme  $u = u_{k+1} + u_k \neq 0$ , on peut alors écrire

$$\begin{aligned} a &= - (L + c_0)u/u = - (r_{k+1}u_{k+1} + r_k u_k) / (u_{k+1} + u_k) \\ &= - (r_{k+1} + r_k v_k) / (1 + v_k), \end{aligned}$$

et toutes les dérivées d'une telle expression peuvent être estimées par des sommes de puissances de  $k$  avec des coefficients de la forme  $(\partial^\alpha r_{k(+1)}) / (1 + v_k)^\nu$ . Mais grâce à (2.10)

$$|1 + v_k| \geq 1 - |v_k| \geq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\beta_0 k^2}{12} (m_k + e_k(y) - t) \right\}$$

car  $e^F \leq \frac{1}{2}$  pour  $F \in ]-\infty, -1]$  et  $e^F \leq 1 + \frac{F}{4}$  pour  $F \in [-2, 0]$ , et le théorème des accroissements finis donne pour  $(y, t) \in D_k^2$

$$\begin{aligned} &|(\partial^\alpha r_{k(+1)}(y, t)) / (m_k + e_k(y) - t)^\nu| \\ &\leq \sup \{ |\partial^{\alpha+\beta} r_{k(+1)}(y, t)| \mid (y, t) \in D_k^2 \text{ et } |\beta| \leq \nu \} \end{aligned}$$

puisque  $r_{k(+1)}$  est plate sur  $t = m_k + e_k(y)$  (cf. (2.8)). On obtient donc en utilisant (2.9) que pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{D_k^2} |\partial^\alpha a| \right) = 0.$$

3. Sur  $D_k^3 = \{(y, t) \mid m_k + e_k(y) < t \leq \delta_{k+1} + \frac{3}{4}l_{k+1}\}$  on procède comme sur  $D_k^2$  en échangeant les rôles de  $u_k$  et  $u_{k+1}$ , et donc en utilisant  $v_k^{-1}$  à la place de  $v_k$ .

4. Sur  $D_k^4 = \{(y, t) \mid \delta_{k+1} + \frac{3}{4}l_{k+1} \leq t \leq \delta_k\}$  on procède comme sur  $D_k^1$  en échangeant les rôles de  $u_k$  et  $u_{k+1}$ .

### CHAPITRE 3: TECHNIQUES D'UNICITÉ

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment prouver certaines inégalités de Carleman, et comment les utiliser pour obtenir l'unicité de Cauchy. En guise d'exemple, nous donnons une démonstration complète pour le cas elliptique (3.1).

Pour démontrer le théorème 1.2, nous suivrons le schéma proposé par Strauss et Trèves [24] sauf au paragraphe 3.2 où nous nous inspirons de Zuily [28]. Il faut dans la démonstration distinguer les étapes suivantes: tout d'abord une étape purement locale où nous établissons un lemme technique copié sur le cas elliptique (3.2); puis nous effectuons par deux fois un passage du local au global afin d'obtenir le théorème 1.2 sous la condition (R) d'abord dans  $\mathbf{R}^2$  (3.3), puis dans  $\mathbf{R}^n$  (3.4); enfin, c'est de nouveau en « globalisant » le résultat donné par le lemme du paragraphe 3.2 que nous obtenons le théorème 1.2 sous la condition (P) (3.5).

### 3.1. LE PROBLÈME ELLIPTIQUE

Un champ  $L$  de  $\mathbf{R}^2$  est dit elliptique en  $x_0$  si les champs réels  $X = \operatorname{Re} L$  et  $Y = \operatorname{Im} L$  sont linéairement indépendants en  $x_0$ . Pour toute fonction  $\varphi$  telle que  $d\varphi(x_0) \neq 0$ , le problème associé à un champ elliptique est non caractéristique. Le champ  $L$  sera dit elliptique dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^2$  s'il est elliptique en chacun de ses points.

**THÉORÈME 3.1.** *Soit  $L$  un champ elliptique en un point  $x_0 \in \mathbf{R}^2$ . Alors, pour tout voisinage  $\omega$  de  $x_0$  et toute  $u \in C^1(\omega)$  solution du système*

$$(3.1) \quad \begin{cases} (L+c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction  $u$  s'annule au voisinage de  $x_0$ .

*Démonstration.* Posons

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) + |x - x_0|^2 \quad \text{et} \quad \Psi(x) = -(\psi(x) - \varepsilon_0)^2$$

pour un  $\varepsilon_0 > 0$  que nous choisirons ultérieurement. Remarquons que pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $K_\varepsilon = \{x \in \omega_+ \mid \psi(x) \leq \varepsilon\}$  est un compact tel que  $x_0$  soit un point intérieur de  $K_\varepsilon \cup \omega_-$ .

Le point clé de la démonstration, que nous établirons plus loin, est l'obtention de l'inégalité suivante (dite inégalité de Carleman): il existe des constantes  $\tau_0 < \infty$  et  $C < \infty$ , et un opérateur  $R$  (du premier ordre) tels que  $\forall v \in C^1(\mathbf{R}^2)$  avec  $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$ ,  $\forall \tau \geq \tau_0$ ,

$$(3.2) \quad \int e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leq C \int e^{-2\tau\Psi} |(L+c_0)v| (|Rv| + |v|).$$

Montrons pour le moment comment obtenir l'unicité à partir d'une telle inégalité. Des valeurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  étant fixées de telle manière que  $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ , nous choisissons une fonction de troncature  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  telle que  $\chi = 1$  sur  $K_{\varepsilon_1}$  et  $\text{supp } \chi \cap \omega_+ \subset K_{\varepsilon_0}$ :

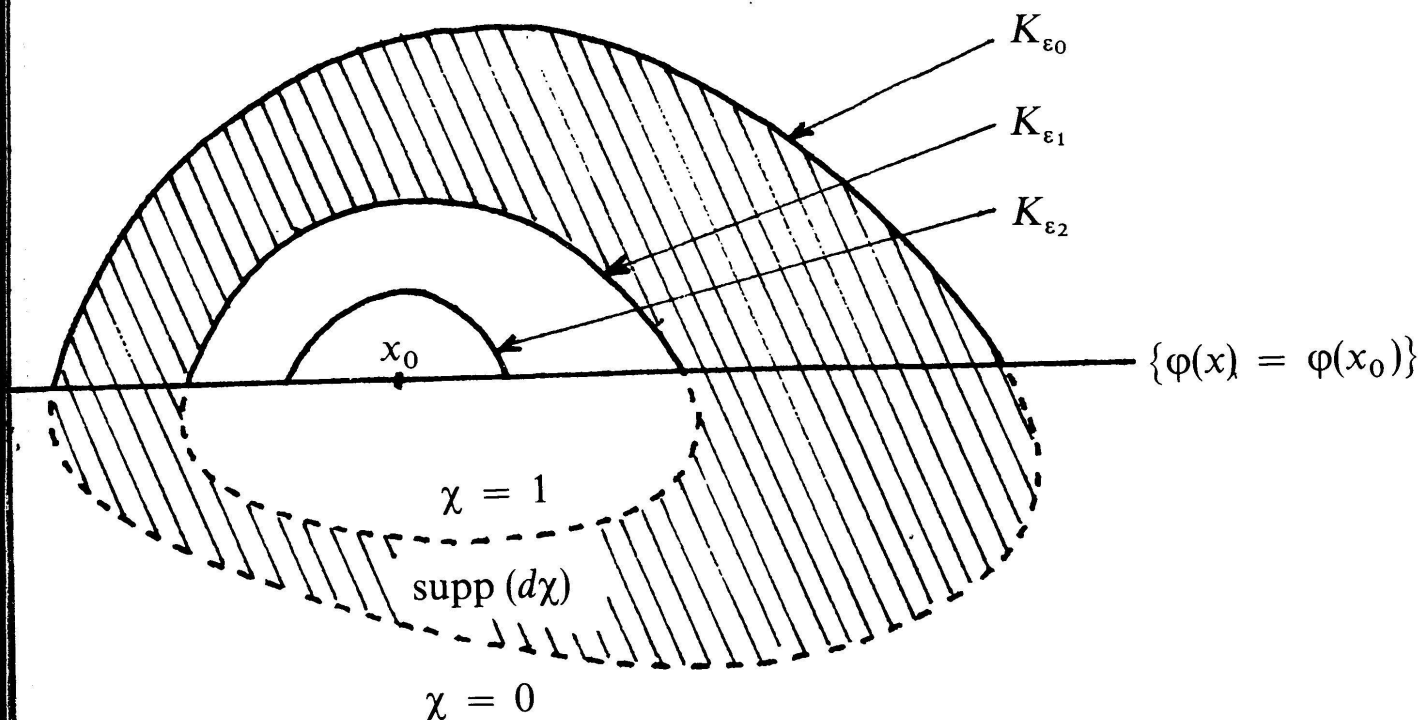


FIGURE 3.1.

Le support de  $\chi$  et les compacts  $K_{\varepsilon_0}$ ,  $K_{\varepsilon_1}$  et  $K_{\varepsilon_2}$ .

Soit  $u$  une solution du système (3.1); formons  $v = \chi u$  le produit de  $u$  par  $\chi$ :  $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$  et  $\text{supp } v \subset K_{\varepsilon_0}$ , donc on peut appliquer l'inégalité (3.2) à  $v$ . Mais d'une part

$$\begin{aligned} e^{2\tau(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)^2} \int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 &\leq \int_{K_{\varepsilon_2}} e^{-2\tau\Psi} |u|^2 \\ &= \int_{K_{\varepsilon_2}} e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leq \int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi} |v|^2, \end{aligned}$$

et d'autre part,  $(L + c_0)v = \chi(L + c_0)u + [L, \chi]u = (L\chi)u = 0$  sur  $K_{\varepsilon_1}$ , d'où

$$\begin{aligned} \int_{K_{\varepsilon_0}} e^{-2\tau\Psi} |(L + c_0)v| (|Rv| + |v|) &= \int_{K_{\varepsilon_0} \setminus K_{\varepsilon_1}} e^{-2\tau\Psi} |(L + c_0)v| (|Rv| + |v|) \\ &\leq e^{2\tau(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2} \int_{K_{\varepsilon_0}} |(L + c_0)v| (|Rv| + |v|). \end{aligned}$$

L'inégalité (3.2) donne donc pour  $\tau \geq \tau_0$ ,

$$\int_{K_{\varepsilon_2}} |u|^2 \leq C e^{2\tau(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \int_{K_{\varepsilon_0}} |(L + c_0)v| (|Rv| + |v|),$$

et comme  $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) < 0$ , il suffit de laisser  $\tau$  tendre vers l'infini pour savoir que  $u = 0$  dans  $K_{\varepsilon_2}$  donc au voisinage de  $x_0$ .

*Démonstration de l'inégalité (3.2).* Comme  $d\psi(x_0) = d\varphi(x_0) \neq 0$  et que  $L$  est elliptique en  $x_0$ , le problème (avec  $\psi$ ) est non caractéristique et nous pouvons d'après le lemme 1.3 trouver des coordonnées  $(y, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  telles que

1.  $x_0 = (0, 0)$ ,
2.  $\psi(x) = t$ ,
3.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \partial_y + c(y, t)$  à un facteur non nul près.

Comme  $L$  est elliptique en  $x_0$ , nous supposons que  $b(0, 0) > 0$  (sinon, changer  $y$  en  $-y$ ), et prendrons  $\varepsilon_0$  suffisamment petit pour que  $b \geq \delta > 0$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ .

En vue d'écrire  $w = e^{-\tau\psi}v$ , posons  $L_\tau = e^{-\tau\psi}(L + c_0)e^{\tau\psi}$ , et  $c = c_1 + ic_2$  où  $c_1$  et  $c_2$  sont à valeurs réelles; d'après les points 2 et 3 ci-dessus, on calcule que:

$$L_\tau = \partial_t - 2\tau(t - \varepsilon_0) + ib \partial_y + c_1 + ic_2 = M + iN \quad \text{où}$$

$$\begin{cases} M = \partial_t + ic_2 \\ N = b \partial_y + i(2\tau(t - \varepsilon_0) - c_1). \end{cases}$$

Dans le découpage ci-dessus, nous avons séparé la partie autoadjointe de la partie anti-autoadjointe pour pouvoir effectuer des intégrations par parties. En effet, pour  $w \in C^1(\mathbf{R}^2)$  avec  $\text{supp } w \subset K_{\varepsilon_0}$ ,

$$\text{Re} \int \frac{1}{ib} L_\tau w \overline{Nw} = \text{Re} \int \frac{1}{ib} M w \overline{Nw} + \int \frac{|Nw|^2}{b} \geq \text{Re} \int \frac{1}{ib} M w \overline{Nw}$$

puisque  $b > 0$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ ; puis

$$2 \text{Re} \int M w \overline{Nw} / ib = \int |w|^2 \partial_t [(2\tau(t - \varepsilon_0) - c_1) / b] - \int |w|^2 \partial_y c_2$$

par intégrations par parties. On obtient donc:

$$\int |w|^2 (2\tau [(b - (t - \varepsilon_0)\partial_t b)/b^2] - [\partial_y c_2 + \partial_t(c_1/b)]) \\ \leq 2 \operatorname{Re} \int \frac{1}{ib} L_\tau w \overline{Nw} \leq 2 \int |L_\tau w| |Nw/b|.$$

Choisissons donc  $\varepsilon_0$  assez petit pour que  $|(t - \varepsilon_0)\partial_t b| \leq \delta/2$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ , puis  $\tau_0$  suffisamment grand pour que  $|\partial_y c_2 + \partial_t(c_1/b)| \leq \delta\tau_0/(2 \sup_{K_{\varepsilon_0}} b^2)$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ ; alors, pour  $\tau \geq \tau_0$  et  $C_0 = 4 \sup b^2/\delta$ ,

$$\frac{\tau}{C_0} \int |w|^2 \leq \int |L_\tau w| |Nw/b|.$$

Enfin, pour  $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$  avec  $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$ , posons  $w = e^{-\tau\Psi}v$ , et reportons cette expression dans l'inégalité précédente; on obtient:

$$\int e^{-2\tau\Psi} |v|^2 \leq \frac{C_0}{\tau} \int e^{-2\tau\Psi} |(L + c_0)v| |(\partial_y - ic_1/b)v| \\ + C_0 \int e^{-2\tau\Psi} |(L + c_0)v| |2(t - \varepsilon_0)v/b|$$

d'où l'inégalité (3.2) si nous posons

$$R = \partial_y - ic_1/b \quad \text{et} \quad C = \max \{C_0/\tau_0, C_0 \sup |2(t - \varepsilon_0)/b|\}.$$

*Remarques.* Il existe pour les champs elliptiques des inégalités de Carleman meilleures que l'inégalité (3.2); nous avons fait ce choix parce que ce résultat s'étend à des champs non elliptiques comme nous le verrons plus loin. L'introduction du facteur  $1/b$  dans les intégrales a pour but de remplacer  $\int b\partial_t w \partial_y \bar{w}$  qui nécessite des calculs pour être estimée, par  $\int \partial_t w \partial_y \bar{w}$  dont la partie imaginaire est nulle; c'est là que nous utilisons l'ellipticité de  $L$ . Dans le prochain paragraphe, nous allons montrer qu'un tel calcul est encore possible sous des hypothèses plus faibles sur  $L$ . Avant cela, donnons un corollaire du théorème 3.1.

**COROLLAIRE 3.2.** Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbf{R}^2$  dans lequel le champ  $L$  est elliptique. Si  $u \in C^1(\Omega)$  vérifie  $(L + c_0)u(x) = 0$  dans  $\Omega$  et s'annule dans un ouvert non vide  $\omega \subset \Omega$ , alors  $u$  est nulle dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* Notons  $F = \operatorname{supp} u$  et supposons que  $F \neq \overset{\circ}{F}$ .

Alors il existe  $x_0 \in F \setminus \overset{\circ}{F}$ . Comme  $x_0 \in \Omega$ , il existe une boule ouverte centrée en  $x_0$ ,  $B(x_0, \delta)$ , qui soit contenue dans  $\Omega$ . Comme  $x_0 \notin \overset{\circ}{F}$ , il existe

un point  $x_1 \in B(x_0, \delta/2)$  tel que  $x_1 \notin F$ . Soit alors  $\varepsilon = \sup \{r \mid B(x_1, r) \cap F = \emptyset\}$ ; on a  $0 < \varepsilon \leq \delta/2$  puisque  $F$  est fermé et que  $x_0 \in F$ , donc  $B(x_1, \varepsilon) \subset B(x_0, \delta) \subset \Omega$ . De plus, par compacité il existe  $x_2 \in F \cap \overline{B(x_1, \varepsilon)}$ .

Soit  $\varphi(x) = |x - x_1|^2$ ; alors  $u$  est nulle dans  $\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \leq \varepsilon^2\} = \overline{B(x_1, \varepsilon)}$  puisque  $B(x_1, \varepsilon) \cap F = \emptyset$  par définition de  $\varepsilon$ ; or le problème est elliptique en  $x_2$  et  $d\varphi(x_2) = 2(x_2 - x_1) \neq 0$ , donc par le théorème 3.1,  $u = 0$  au voisinage de  $x_2$ , ce qui contredit le fait que  $x_2 \in F = \text{supp } u$ .

Cette contradiction prouve que le support de  $u$  est à la fois ouvert et fermé. Mais  $\text{supp } u \neq \Omega$  puisque  $\omega \neq \emptyset$  est contenu dans le complémentaire de ce support. Comme  $\Omega$  est connexe, c'est que  $\text{supp } u = \emptyset$ .

### 3.2. UN LEMME TECHNIQUE

Pour préparer la démonstration du théorème 1.2, nous donnons maintenant un résultat d'unicité dans  $\mathbf{R}^2$  copié sur le résultat précédent, mais sous des hypothèses plus faibles.

**LEMME 3.3.** *Soient  $\theta: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  et  $b: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions  $C^\infty$ . Supposons qu'il existe un voisinage convexe  $\omega$  de  $(y_0, \theta(y_0))$  tel que  $b$  soit positive sur  $\omega_+ = \{(y, t) \in \omega \mid t \geq \theta(y)\}$  et  $b(y_0, t_0) > 0$  pour un  $t_0$  tel que  $(y_0, t_0) \in \omega_+$ . Alors pour toute  $u \in C^1(\omega)$  solution du système*

$$(3.3) \quad \begin{cases} \partial_t u + ib \partial_y u + cu = 0 & \text{dans } \omega, \text{ et} \\ u = 0 & \text{dans } \omega_- = \{(y, t) \in \omega \mid t \leq \theta(y)\} \end{cases}$$

la fonction  $u$  s'annule au voisinage de  $(y_0, \theta(y_0))$ .

*Démonstration.* Elle sera très semblable à celle du théorème 3.1. Pour commencer, nous allons choisir un poids  $\psi$  fabriqué de telle manière que l'opérateur  $n = N/b$  soit encore bien défini.

Si  $b(y_0, \theta(y_0)) > 0$ , nous sommes dans le cas elliptique, et le résultat découle du théorème 3.1; nous supposons donc tout au long de cette démonstration que  $b(y_0, \theta(y_0)) = 0$ . Le  $t_0$  de l'hypothèse vérifie donc  $t_0 > \theta(y_0)$ , et il existe un voisinage de  $(y_0, t_0)$  contenu dans  $\omega_+$  tel que  $b \geq \delta > 0$  dans ce voisinage (et nous supposons  $\delta \leq 1$  dans la suite); nous pouvons même choisir ce voisinage de la forme

$$]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[ \times ]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[.$$

Nous posons alors

$$(3.4) \quad \psi(y, t) = (y - y_0)^2 + \int_{\theta(y)}^t b(y, s) (t_0 + \alpha - s) ds.$$

Alors, pour tout  $0 < \varepsilon \leq \alpha^2 \delta$ ,  $K_\varepsilon = \{x \in \omega_+ \mid \psi(x) \leq \varepsilon\}$  est un compact tel que  $x_0$  soit un point intérieur de  $K_\varepsilon \cup \omega_-$ , ce qui nous permettra de déduire l'unicité de l'inégalité de Carleman (3.5) comme dans la démonstration du théorème 3.1.

Soit  $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha^2 \delta$  que nous fixerons plus loin. En vue d'écrire  $w = v \exp\left(-\tau\psi + \int_{t_0}^t c(y, s) ds\right)$ , posons

$$L_\tau = \left[ \exp(-\tau\psi + \int_{t_0}^t c(y, s) ds) \right] [\partial_t + ib\partial_y + c] \left[ \exp(\tau\psi - \int_{t_0}^t c(y, s) ds) \right].$$

Grâce à (3.4), et en posant  $\int_{t_0}^t \partial_y c(y, s) ds = c_1(y, t) + ic_2(y, t)$  où  $c_1$  et  $c_2$  sont à valeurs réelles, on calcule que :

$$\begin{aligned} L_\tau &= [\partial_t + \tau b(t_0 + \alpha - t) - c] + ib[\partial_y + \tau \partial_y \psi - (c_1 + ic_2)] + c \\ &= M + iN = M + ibn \end{aligned}$$

où nous avons séparé la partie autoadjointe de la partie anti-autoadjointe :

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{\partial}{\partial t} + i\tau b \frac{\partial \psi}{\partial y} - ibc_1 \\ n = \frac{\partial}{\partial y} - i\tau(t_0 + \alpha - t) - ic_2. \end{array} \right.$$

Alors, pour  $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$  avec  $\text{supp } w \subset K_{\varepsilon_0}$ ,

$$\text{Re} \int \frac{1}{i} L_\tau \overline{wnw} = \text{Re} \int \frac{1}{i} M \overline{wnw} + \int b |nw|^2 \geq \text{Re} \int \frac{1}{i} M \overline{wnw}$$

puisque  $b \geq 0$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ ; puis,

$$2 \text{Re} \int M \overline{wnw} / i = - \int |w|^2 \partial_t (\tau(t_0 + \alpha - t) + c_2) - \int |w|^2 \partial_y (\tau b \partial_y \psi - bc_1)$$



par intégrations par parties. On obtient donc

$$\begin{aligned} & \int |w|^2 [\tau(1 - \partial_y(b\partial_y\psi)) + (\partial_y(bc_1) - \partial_t(c_2))] \\ & \leq 2 \operatorname{Re} \int \frac{1}{i} L_\tau \overline{wnw} \leq 2 \int |L_\tau w| |nw|. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant distinguer deux cas. Pour cela, posons  $\theta_0 = \sup \{t > \theta(y_0) \mid \forall s \in [\theta(y_0), t], b(y_0, s) = 0\}$ ; alors  $\theta(y_0) \leq \theta_0 < t_0$ . Si  $\theta_0 = \theta(y_0)$ , alors pour tout voisinage de  $(y_0, \theta(y_0))$  on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que  $K_\varepsilon$  soit contenu dans ce voisinage; en revanche, si  $\theta_0 > \theta(y_0)$ , alors  $\psi$  est nulle sur  $K_0 = \{y_0\} \times [\theta(y_0), \theta_0]$ , et c'est seulement pour tout voisinage de  $K_0$  qu'on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que  $K_\varepsilon$  soit contenu dans ce voisinage. Cette distinction de cas nous permet d'écrire:

1. Si  $\theta_0 = \theta(y_0)$ , calculons  $\partial_y\psi$  par la formule (3.4):

$$\partial_y\psi = 2(y - y_0) + \int_{\theta(y)}^t \partial_y b(y, s) (t_0 + \alpha - s) ds + \theta'(y) b(y, \theta(y)) (t_0 + \alpha - \theta(y))$$

et donc  $b(y_0, \theta(y_0)) = \partial_y\psi(y_0, \theta(y_0)) = 0$ ; d'où  $\partial_y(b\partial_y\psi)(y_0, \theta(y_0)) = 0$ , ce qui fait qu'on peut trouver  $\varepsilon_0$  assez petit pour que  $|\partial_y(b\partial_y\psi)| \leq 1/2$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ .

2. Si  $\theta_0 > \theta(y_0)$ , alors  $b$  est nulle sur  $K_0$ , et comme  $b$  est positive dans  $\omega_+$ ,  $\partial_y b$  est également nulle dans  $\{y_0\} \times ]\theta(y_0), \theta_0]$ , donc dans  $K_0$ ; d'où  $\partial_y(b\partial_y\psi) = 0$  dans  $K_0$ , ce qui fait qu'on peut trouver  $\varepsilon_0$  assez petit pour que  $|\partial_y(b\partial_y\psi)| \leq 1/2$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ .

Le nombre  $\varepsilon_0 > 0$  étant choisi, oublions maintenant cette distinction des deux cas, et choisissons  $\tau_0$  suffisamment grand pour que  $|\partial_y(bc_1) - \partial_t c_2| \leq \tau_0/4$  dans  $K_{\varepsilon_0}$ ; alors, pour  $\tau \geq \tau_0$

$$\frac{\tau}{4} \int |w|^2 \leq 2 \int |L_\tau w| |nw|.$$

Enfin, pour  $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$  avec  $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$ , posons

$$w = v \exp(-\tau\psi + \int_{t_0}^t c(y, s) ds)$$

et reportons cette expression dans l'inégalité précédente; on obtient:

$$\int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int c} |v|^2 \leq \frac{8}{\tau} \int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int c} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| |\partial_y v + c_1 v| \\ + 8 \int e^{-2\tau\psi} e^{2\operatorname{Re}\int c} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| |(\partial_y \psi + i(t_0 + \alpha - t))v|.$$

Il existe donc une constante  $C$  telle que pour toute  $v \in C^1(\mathbf{R}^2)$  avec  $\operatorname{supp} v \subset K_{\varepsilon_0}$  et tout  $\tau \geq \tau_0$ ,

$$(3.5) \quad \int e^{-2\tau\psi} |v|^2 \leq C \int e^{-2\tau\psi} |\partial_t v + ib\partial_y v + cv| (|\partial_y v + c_1 v| + |v|).$$

### 3.3. UNICITÉ EN DIMENSION DEUX SOUS LA CONDITION (R)

Nous continuons en donnant une version faible du théorème 1.2 sous la condition (R) lorsque l'espace est  $\mathbf{R}^2$ .

**THÉORÈME 3.4.** *Supposons que  $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x_0) = 2$  en un point  $x_0 \in \mathbf{R}^2$ . Si le problème est non caractéristique (en  $x_0$ ), alors pour tout voisinage  $\omega$  de  $x_0$  et toute  $u \in C^1(\omega)$  solution du système*

$$(3.6) \quad \begin{cases} (L + c_0)u(x) = 0 & \text{dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 & \text{dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction  $u$  s'annule au voisinage de  $x_0$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 1.3, nous pouvons prendre sur  $\mathbf{R}^2$  des coordonnées  $(y, t)$  telles que :

1.  $x_0 = (0, 0)$ ,
2.  $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$ ,
3.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \partial_y + c(y, t)$  à un facteur non nul près.

Si  $b(0, 0) \neq 0$ , nous sommes dans le cas elliptique et le résultat découle du théorème 3.1. Sinon, par l'hypothèse  $\operatorname{rg} \mathcal{L}(x_0) = 2$ , il existe  $k > 0$  tel que  $\partial_t^k b(0, 0) \neq 0$  tandis que  $\partial_t^j b(0, 0) = 0$  pour  $j < k$ . Alors, par le théorème de préparation de Malgrange (cf. Hörmander [11, th. 7.5.5]), il existe, pour  $(y, t) \in ]-Y, Y[ \times ]-T, T[$  avec  $Y > 0$  et  $T > 0$ , une factorisation

$$b(y, t) = a(y, t) (t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + \dots + a_0(y))$$

avec  $a, a_0, \dots, a_{k-1}$  des fonctions  $C^\infty$  à valeurs réelles telles que  $a(y, t) \neq 0$  dans  $] -Y, Y[ \times ] -T, T[$ , et  $a_j(0) = 0$  pour  $j = 0, \dots, k-1$ . Nous allons maintenant découper le domaine  $] -Y, Y[ \times ] -T, T[$  en petits morceaux pour pouvoir appliquer le lemme 3.3; ce découpage nous est donné par le lemme suivant :

LEMME 3.5. *Dans la situation décrite ci-dessus, il existe une suite d'intervalles ouverts disjoints  $(I_i)_{i \in \mathbf{N}}$  dont la réunion est dense dans  $] -Y, Y[$ , et pour chaque  $i \in \mathbf{N}$ , un nombre fini de fonctions  $C^\infty$   $\theta_{i,j}: I_i \rightarrow \mathbf{R}$  tels que pour tout  $y \in I_i$ :*

1.  $j_1 < j_2 \Rightarrow \theta_{i,j_1}(y) < \theta_{i,j_2}(y)$ ,
2.  $b(y, t) = 0 \Leftrightarrow \exists j$  tel que  $t = \theta_{i,j}(y)$ .

*Démonstration du lemme.* Avec les notations précédentes, posons

$$P(y, t) = t^k + a_{k-1}(y)t^{k-1} + \dots + a_0(y)$$

qui est un polynôme en  $t$  à coefficients réels et réguliers en  $y$ .

Soit  $\mathcal{O}_k$  l'ouvert de  $] -Y, Y[$  tel que  $P(y, t)$  possède  $k$  racines complexes distinctes en  $t$  pour  $y \in \mathcal{O}_k$ ; notons  $\mathcal{O}'_k$  l'intérieur du complémentaire de  $\mathcal{O}_k$  dans  $] -Y, Y[$ . Si  $\mathcal{O}'_k$  est vide, c'est que  $\mathcal{O}_k$  est dense dans  $] -Y, Y[$  et nous arrêtons là notre construction; sinon  $P(y, t)$  possède au plus  $k-1$  racines complexes distinctes en  $t$  pour  $y \in \mathcal{O}'_k$ . Nous définissons alors  $\mathcal{O}_{k-1}$  comme l'ouvert de  $\mathcal{O}'_k$  tel que  $P(y, t)$  possède exactement  $k-1$  racines complexes distinctes en  $t$  pour  $y \in \mathcal{O}_{k-1}$ , puis  $\mathcal{O}'_{k-1}$  comme l'intérieur du complémentaire de  $\mathcal{O}_{k-1}$  dans  $\mathcal{O}'_k$ . Et ainsi de suite; l'ouvert  $\bigcup_{j=1}^k \mathcal{O}_j$  est alors dense dans  $] -Y, Y[$ . Nous appelons  $(I_i)_{i \in \mathbf{N}}$  les composantes connexes des ouverts  $\mathcal{O}_j$ .

Dans chaque intervalle  $I_i$ , les racines en  $t$  de  $P(y, t)$  sont de multiplicité constante, et par le théorème des fonctions implicites, elles sont donc fonctions  $C^\infty$  de  $y$ ; de plus,  $P$  étant à coefficients réels,  $\theta$  est racine si et seulement si  $\bar{\theta}$  est racine, et donc, toujours à cause de la multiplicité constante, les racines réelles et distinctes restent réelles et distinctes quand  $y$  décrit  $I_i$ . Ces racines réelles sont donc représentées par des fonctions  $C^\infty$   $\theta_{i,j}: I_i \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant 1. et 2.

*Démonstration du théorème 3.4 (fin).* Soit  $u \in C^1(\omega)$  une solution du problème (3.6). Supposons qu'elle soit non nulle en un point de  $] -Y, Y[ \times ] 0, T[$ ; alors elle est non nulle dans tout un voisinage de ce point, et donc il

existe un point  $(y_0, t_0) \in \text{supp } u$  avec  $y_0 \in I_i$  pour un  $i \in \mathbf{N}$ . L'intervalle  $I_i$  étant ouvert, il existe aussi  $\varepsilon > 0$  tel que  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset I_i$ .

Posons  $\psi(y, t) = t + t_0(y - y_0)^2 \varepsilon^{-2}$  et considérons les paraboles  $P_\tau$  d'équations  $\psi(y, t) = \tau$ . La fonction  $u$  est nulle en dessous de la parabole  $P_0$  puisque  $P_0 \subset \{t \leq 0\}$ , mais  $P_{t_0}$  coupe le support de  $u$  et  $P_{t_0} \cap \{t \geq 0\} \subset I_i \times [0, T[$ . Par compacité, il existe donc un point  $(y_1, t_1) \in \text{supp } u \cap (I_i \times [0, T[$  tel que  $u = 0$  dans  $\{(y, t) \in \omega \mid \psi(y, t) \leq \psi(y_1, t_1)\}$ . Nous distinguerons alors deux cas :

1. Si  $b(y_1, t_1) \neq 0$ , le problème est elliptique en  $(y_1, t_1)$  et  $d\psi(y_1, t_1) \neq 0$ ; donc par le théorème 3.1,  $u = 0$  au voisinage de  $(y_1, t_1)$  ce qui contredit le fait que  $(y_1, t_1) \in \text{supp } u$ .

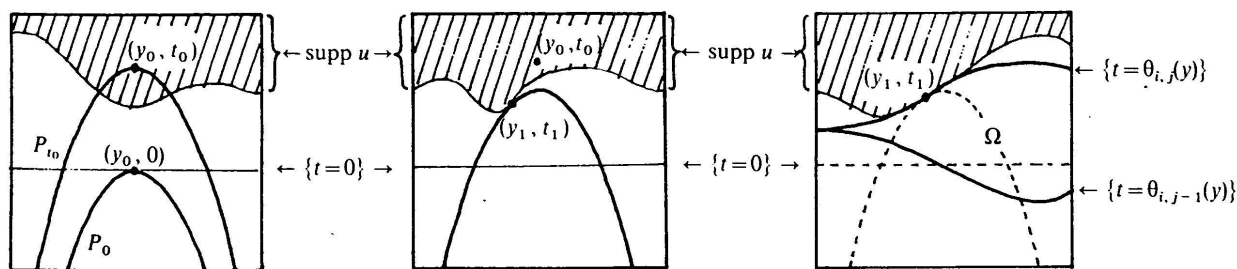
2. Si  $b(y_1, t_1) = 0$ , par le lemme 3.5 il existe  $j$  tel que  $t_1 = \theta_{i,j}(y_1)$ . En outre, le lemme 3.5 permet d'affirmer que

$\alpha$ .  $\Omega = \{(y, t) \in I_i \times \mathbf{R} \mid \theta_{i,j-1}(y) < t < \theta_{i,j}(y)\}$  est un ouvert connexe;

$\beta$ .  $b$  ne s'annule pas dans  $\Omega$ , donc  $L$  est elliptique dans  $\Omega$ .

Comme  $u$  s'annule dans  $\{(y, t) \in \omega \mid \psi(y, t) < \psi(y_1, t_1)\}$ , elle s'annule dans l'intersection de ce domaine avec  $\Omega$ , qui est une partie ouverte non vide de  $\Omega$ . Par le corollaire 3.2,  $u$  est nulle dans  $\Omega$ .

De même, la fonction  $b$  ne s'annule pas dans  $\{(y, t) \in I_i \times \mathbf{R} \mid \theta_{i,j}(y) < t < \theta_{i,j+1}(y)\}$ , et on peut donc supposer, quitte à changer  $y$  en  $-y$ , que  $b$  est strictement positive dans ce domaine. Il existe donc un voisinage convexe  $w$  de  $(y_1, t_1)$  tel que  $b$  soit positive sur  $w_+ = \{(y, t) \in w \mid t \geq \theta_{i,j}(y)\}$ , strictement positive en un point  $(y_1, t_2) \in w_+$ , et tel que  $u = 0$  dans  $w_- = \{(y, t) \in w \mid t \leq \theta_{i,j}(y)\}$ . Tout cela nous permet alors d'utiliser le lemme 3.3 au point  $(y_1, t_1)$ : nous obtenons  $u = 0$  au voisinage de  $(y_1, t_1)$ , ce qui contredit le fait que  $(y_1, t_1) \in \text{supp } u$ .



Les paraboles  $P_0$  et  $P_{t_0}$ .

Cas 1.

Cas 2.

FIGURE 3.2.  
Les paraboles  $P_\tau$ .

## 3.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (R)

Dans ce paragraphe, l'espace est  $\mathbf{R}^n$ ,  $n$  entier quelconque.

Commençons par expliciter les hypothèses du théorème 1.2 sous la condition (R); le problème étant non caractéristique, nous pouvons choisir (lemme 1.3) des coordonnées locales  $(y, t)$  telles que :

1.  $x_0 = (0, 0)$ ,
2.  $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$ ,
3.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$  à un facteur non nul près.

L'intersection de l'ouvert  $\omega$  avec le domaine dans lequel la propriété (R) est vérifiée contient un voisinage de  $(0, 0)$  de la forme  $v \times ]-T, T[$  où  $T > 0$  et  $v$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^{n-1}$  suffisamment petit pour que  $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$  sur  $S = \{(y, 0) \in \mathbf{R}^n \mid y \in v\}$ . On a  $\text{rg } \mathcal{L} \geq 1$  sur  $S$  puisque  $\partial_t \in \mathcal{L}$ , ce qui entraîne encore que :

1. Pour un point  $(y_0, 0) \in S$  tel que  $\text{rg } \mathcal{L}(y_0, 0) = 1$ , la variété intégrale passant par  $(y_0, 0)$  est  $\{y_0\} \times ]-T, T[$ .
2. Pour un point  $(y_0, 0) \in S$  tel que  $\text{rg } \mathcal{L}(y_0, 0) = 2$ , si la courbe  $\gamma \subset S$  est la trace sur  $S$  de la variété intégrale passant par  $(y_0, 0)$ , cette dernière est  $\gamma \times ]-T, T[$ .

Comme la réunion des traces sur  $S$  des variétés intégrales de  $\mathcal{L}$  est égale à  $S$  par la propriété (R), la réunion des variétés intégrales de  $\mathcal{L}$  coupant  $S$  est égale au voisinage  $v \times ]-T, T[$  tout entier.

Soit  $u \in C^1(\omega)$  une solution du problème (1.2), et supposons qu'il existe un point  $(y_0, t_0) \in v \times ]0, T[$  tel que  $u(y_0, t_0) \neq 0$ . Ce point  $(y_0, t_0)$  est donc situé sur une variété intégrale de  $\mathcal{L}$  coupant  $S$ . Si  $(y_0, t_0)$  est sur une variété intégrale de dimension 1, c'est que  $b(y_0, t) = 0$  pour tout  $t \in ]-T, T[$ , et  $u$  vérifie donc l'équation

$$\partial_t u(y_0, t) + c(y_0, t) u(y_0, t) = 0 \quad \text{pour } t \in ]-T, T[$$

où  $y_0$  n'est plus qu'un paramètre; la théorie des équations différentielles ordinaires nous permet de conclure que  $u(y_0, t) = 0$  pour  $t \in ]0, T[$ , ce qui contredit le fait que  $u(y_0, t_0) \neq 0$ .

Il s'ensuit donc que  $(y_0, t_0)$  est sur une variété intégrale de  $\mathcal{L}$  de dimension 2 que nous noterons  $\mathcal{V}$ . Utilisons  $(z, t)$  comme coordonnées sur  $\mathcal{V}$  où  $z$  est l'abscisse curviligne sur  $\mathcal{V} \cap S$ , et désignons par  $z_0$  l'abscisse du point  $(y_0, t_0)$  dans les coordonnées  $(z, t)$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon] \times ]-T, T[$  soit contenu dans  $\mathcal{V}$ . Comme dans la démonstration du théorème 3.4, nous posons  $\psi(z, t) = t + t_0(z - z_0)^2 \varepsilon^{-2}$  et intro-

duisons les paraboles  $P_\tau$  d'équations  $\psi(z, t) = \tau$ . Nous obtenons ainsi un point  $(z_1, t_1)$  du support de la trace de  $u$  sur  $\mathcal{V}$  tel que  $u = 0$  dans  $\{(z, t) \in \mathcal{V} \mid \psi(z, t) \leq \psi(z_1, t_1)\}$ . Or le problème (pour  $\psi$ ) est non caractéristique en  $(z_1, t_1)$  et  $\text{rg } \mathcal{L}(z_1, t_1) = 2$  puisque nous sommes sur une variété intégrale de  $\mathcal{L}$  de dimension 2. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.4 pour conclure que  $u$  est nulle au voisinage de  $(z_1, t_1)$  sur  $\mathcal{V}$ , ce qui contredit le fait que  $(z_1, t_1)$  est un point du support de la trace de  $u$  sur  $\mathcal{V}$ .

Nous avons donc obtenu que  $u = 0$  dans  $v \times ]-T, T[$ .

### 3.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2 SOUS LA CONDITION (P)

Comme le problème est non caractéristique, nous pouvons faire usage du lemme 1.3 pour trouver des coordonnées locales  $(y, t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ , un voisinage  $v$  de 0 dans  $\mathbf{R}^{n-1}$  et un nombre  $T > 0$  tels que

1.  $x_0 = (0, 0)$ ,
2.  $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t$ ,
3.  $L + c_0 = \partial_t + ib(y, t) \cdot \partial_y + c(y, t)$  dans  $v \times ]-T, T[$  à un facteur non nul près,
4.  $v \times ]-T, T[ \subset \omega \cap \Omega$ .

Soit  $u \in C^1(\omega)$  une solution du problème (1.2) et supposons qu'il existe  $(y_0, t_0) \in v \times ]0, T[$  tel que  $u(y_0, t_0) \neq 0$ . Si on avait  $b(y_0, t) = 0$  pour tout  $t \in ]0, t_0[$ , l'équation se réduirait à une équation différentielle ordinaire, ce qui conduirait à une contradiction.

Il existe donc  $t_1 \in ]0, t_0[$  tel que  $b(y_0, t_1) \neq 0$ . Il existe aussi tout un voisinage de  $y_0$  tel que  $b(y, t_1) \neq 0$  pour  $y$  dans ce voisinage, par continuité, et le vecteur

$$d(y) = b(y, t_1) / |b(y, t_1)|$$

est bien défini et régulier au voisinage de  $y_0$ ; par conséquent, le champ réel  $d(y) \cdot \partial_y$  admet en  $y_0$  une courbe intégrale que nous noterons  $\gamma$ .

Comme la condition (P) est vérifiée dans  $v \times ]0, T[$ , nous avons  $b(y, t) = |b(y, t)| d(y)$  pour tout  $(y, t) \in \gamma \times ]0, T[$ , et donc le champ  $L$  est tangent à  $\gamma \times ]0, T[$ ; nous pouvons désormais nous restreindre à  $\gamma \times ]-T, T[$  qui contient le point  $(y_0, t_0)$  où  $u$  ne s'annule pas et sur lequel nous prenons comme coordonnées le couple  $(z, t)$  où  $z$  est l'abscisse curviligne sur  $\gamma$  associée au champ  $d(y) \cdot \partial_y$ ;  $z_0$  désignera l'abscisse du point  $(y_0, t_0)$ .

Par continuité, il existe un  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que le problème restreint à  $\gamma \times ]-T, T[$  se présente de la façon suivante :

1.  $\mathcal{V} = ]z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon[ \times ]-T, T[ \subset \gamma \times ]-T, T[$ ;
2.  $u(z, t_0) \neq 0$  pour  $z \in ]z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon[$ ;
3.  $L + c_0 = \partial_t + ib(z, t) \partial_z + c(z, t)$  dans  $\mathcal{V}_+ = ]z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon[ \times [0, T[$ ;
4.  $b(z, t) \geq 0$  dans  $\mathcal{V}_+$  (par la condition (P)).

Comme dans la démonstration du théorème 3.4, introduisons la fonction  $\psi(z, t) = t + t_0(z - z_0)^2 \varepsilon^{-2}$  et les paraboles  $P_\tau$  d'équations  $\psi(z, t) = \tau$ . Nous obtenons ainsi un point  $(z_2, t_2)$  du support de la trace de  $u$  sur  $\mathcal{V}_+$  tel que  $t_2 < t_0$  et  $u = 0$  dans  $\{(z, t) \in \mathcal{V} \mid \psi(z, t) \leq \psi(z_2, t_2)\}$ .

Comme tout à l'heure, si on avait  $b(z_2, t) = 0$  pour tout  $t \in ]t_2, T[$ , on prouverait que  $u(z_2, t_0) = 0$  ce qui contredit le point 2 ci-dessus. Il existe donc  $t_3 \in ]t_2, T[$  tel que  $b(z_2, t_3) > 0$ . Nous distinguons alors deux cas de figure :

1. Si  $t_2 > 0$ , posons  $\theta(z) = t_2 + t_0 \left( \frac{z_2 - z_0}{\varepsilon} \right)^2 - t_0 \left( \frac{z - z_0}{\varepsilon} \right)^2$  (en sorte que  $t \geq \theta(z) \Leftrightarrow \psi(z, t) \geq \psi(z_2, t_2)$ ). Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe  $w$  de  $(z_2, t_2)$  contenant  $(z_2, t_3)$  (où  $b > 0$ ) tel que  $b$  soit positive dans  $w_+ = \{(z, t) \in w \mid t \geq \theta(z)\}$  et  $u = 0$  dans  $w_- = \{(z, t) \in w \mid t \leq \theta(z)\}$ . Par le lemme 3.3 nous en déduisons que  $u = 0$  au voisinage de  $(z_2, t_2)$  ce qui contredit le fait que  $(z_2, t_2)$  est un point du support de la trace de  $u$  sur  $\mathcal{V}_+$ .
2. Si  $t_2 = 0$ , posons  $\theta(z) = 0$ . Nous pouvons alors trouver un voisinage convexe  $w$  de  $(z_2, t_2)$  possédant les mêmes propriétés que dans le cas précédent, d'où la même conclusion.

#### CHAPITRE 4: ETUDE D'UN MODÈLE DANS $\mathbf{R}^2$

Lorsque nous supprimons les hypothèses « techniques », le théorème 1.2 devient faux; c'est ce que montre l'un des premiers contre-exemples à l'unicité de Cauchy historiquement construits: le contre-exemple de Cohen [8]. Plutôt que d'en répéter la construction, que le lecteur trouvera par exemple dans Hörmander [9, th. 8.9.2], nous avons préféré étudier de façon assez précise un modèle dans  $\mathbf{R}^2$  (ce qui assure que  $\text{rg } \mathcal{L} \leq 2$ ) qui fournit des contre-exemples où le champ  $L$  est complètement explicite; c'est l'objet de ce chapitre.