Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'UNICITÉ POUR LES PROBLÈMES DE CAUCHY LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE

Autor: Raymond, Xavier Saint

Kapitel: Chapitre 6: Rôle du terme d'ordre zéro

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55077

points arbitrairement proches de x_0 dans $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$ où le problème n'est pas caractéristique, nous pouvons appliquer le théorème 1.1; si le problème est caractéristique en tous les points de S, c'est que la variété intégrale de $\mathscr{L}$ passant par x_0 reste localement dans S, et nous pouvons appliquer le théorème 5.3.

Chapitre 6: Rôle du terme d'ordre zéro

Aux théorèmes 1.1, 2.2, 4.2 et 5.3, nous avons dû modifier le terme d'ordre zéro pour montrer qu'il n'y avait pas unicité de Cauchy. Il est alors naturel de se demander si de tels problèmes possèdent tout de même la propriété d'unicité pour certains termes d'ordre zéro. La réponse à cette question est positive comme nous le verrons ci-dessous.

Cependant, le rôle du terme d'ordre zéro est encore mal connu. Nous nous bornerons ici à énoncer deux remarques qui suggèrent la nature des conditions à imposer. La première d'entre elles (théorème 6.1) est dûe à Lewy [15].

Avant d'énoncer le premier théorème, rappelons que la résolubilité locale d'un champ complexe non dégénéré a été étudiée par Nirenberg et Trèves [17], et que sous les hypothèses du théorème 2.2, ainsi que sous les hypothèses du théorème 5.3 si rg $\mathscr{L} \geqslant 3$, le champ L n'est localement résoluble en aucun point d'un voisinage de x_0; de même, les hypothèses des théorèmes 1.1 et 4.2 entraînent qu'il existe de nombreux points voisins de x_0 où L n'est pas localement résoluble. Il en résulte qu'il existe des fonctions C^∞ c telles que l'équation $Lv - c = 0$ ne possède pas de solution v au voisinage de ces points.

Théorème 6.1. *Soit $\mathscr{N}_j(c_0)$ l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ au voisinage desquels l'équation $Lv(x) + c_0(x) = 0$ ne possède pas de solution $v \in C^j$. S'il existe un voisinage Ω de x_0 tel que*

$$\overline{\mathscr{N}_j(c_0)} \supset \Omega_+ = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\},$$

alors pour tout voisinage ω de x_0 et toute $u \in C^j(\omega)$ solution du système

$$(6.1) \qquad \begin{cases} (L+c_0)u(x) = 0 \text{ dans } \omega \text{ et} \\ u(x) = 0 \text{ dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}, \end{cases}$$

la fonction u s'annule au voisinage de x_0.

Démonstration. Soit $u \in C^j(\omega)$ une solution du problème (6.1). Supposons qu'elle n'est pas nulle dans $\omega \cap \Omega$. Alors, comme $u(x) = 0$ dans ω_-, il existe un ouvert contenu dans $\omega \cap \Omega_+$ où u ne prend pas la valeur 0; cet ouvert contient donc un point $x_1 \in \mathcal{N}_j(c_0)$ et une boule ω_1 de centre $x_1 : u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \omega_1$. Dans ω_1, on peut alors écrire $u(x) = e^{v(x)}$ pour une fonction $v \in C^j(\omega_1)$. Or (6.1) implique que $Lv(x) + c_0(x) = 0$ dans ω_1, ce qui contredit le fait que $x_1 \in \mathcal{N}_j(c_0)$. Donc $u = 0$ dans $\omega \cap \Omega$.

Dans le théorème suivant, nous nous plaçons résolument dans une situation où l'on a déjà montré qu'il n'y avait pas unicité pour un terme d'ordre zéro donné c_0 (situation fournie par exemple par l'un des théorèmes 1.1, 2.2, 4.2 ou 5.3), et nous cherchons pour quels autres termes d'ordre zéro c l'opérateur $L + c$ ne possède toujours pas la propriété d'unicité.

Pour un fermé F, nous noterons $C^j(F)$ l'ensemble des fonctions $v \in C^j(\mathring{F})$ possédant la propriété suivante: pour tout $x \in F$ et tout multi-indice α de longueur inférieure à j, il existe un voisinage ω_α de x tel que $\partial_x^\alpha v$ reste bornée dans $\omega_\alpha \cap \mathring{F}$.

THÉORÈME 6.2. *Supposons qu'il existe un voisinage* ω *de* x_0 *et des fonctions* $u_0 \in C^j(\omega)$ *et* $c_0 \in C^\infty(\omega)$ *tels que*

$$\begin{cases} (L+c_0)u_0(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega, \quad \textit{et} \\ x_0 \in \operatorname{supp} u_0 \subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}\,. \end{cases}$$

Si de plus l'équation $Lv(x) + c(x) - c_0(x) = 0$ *possède une solution* $v \in C^j(\operatorname{supp} u_0)$, *alors il existe une fonction* $u \in C^j(\omega)$ *telle que*

$$\begin{cases} (L+c)u(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega, \quad \textit{et} \\ x_0 \in \operatorname{supp} u \subset \omega_+\,. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $u(x) = e^{v(x)}u_0(x)$.

Application. Comme illustration de ce dernier théorème, reprenons un problème abordé au chapitre 5.

Supposons qu'il existe un voisinage Ω d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$ dans lequel le champ L vérifie la condition (P) et $\mathscr{L}$ est de rang constant. Deux exemples d'une telle situation sont fournis par le cas où L est un champ réel (non dégénéré en x_0) et le cas où $X = \operatorname{Re} L$ et $Y = \operatorname{Im} L$ sont linéairement indépendants en x_0 et commutent au voisinage de $x_0([X, Y]=0)$.

Notons $\mathscr{V}$ la variété intégrale de $\mathscr{L}$ passant par x_0; alors, en rassemblant les résultats des théorèmes 5.2, 5.3 et 6.2, et en rappelant que sous la condition (P), L est localement résoluble (cf. Nirenberg et Trèves [17]), on s'aperçoit qu'on a démontré l'équivalence des deux propriétés suivantes:

1. Unicité locale en x_0: pour tout voisinage ω de x_0,

$$\left.\begin{array}{l} u \in C^1(\omega)\,, \\ (L+c_0)u(x) = 0 \text{ dans } \omega, \text{ et} \\ u(x) = 0 \text{ dans } \omega_- = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\} \end{array}\right\} \Rightarrow u = 0 \text{ au voisinage de } x_0\,.$$

2. Pour tout voisinage ω de x_0, $\mathscr{V} \cap \omega \not\subset \omega_+ = \{x \in \omega \mid \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALINHAC, S. Non unicité du problème de Cauchy. *Annals of Math. 117* (1983), 77-108.

[2] —— Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem. *Contemporary Mathematics, Vol. 27* (1984), 1-22.

[3] ALINHAC, S. et C. ZUILY. Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles. *Comm. in Pde's, 6 (7)* (1981), 799-828.

[4] BAOUENDI, M. S. and C. GOULAOUIC. Cauchy problems with characteristic initial hypersurface. *Comm. on Pure and Appl. Math. 26* (1973), 455-475.

[5] BAOUENDI, M. S. and F. TRÈVES. A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields. *Annals of Math. 113* (1981), 387-421.

[6] CALDERÓN, A. P. Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations. *Proc. Symp. Fluid Dynamics and applied Math.*, (Univ. of Maryland 1961), 147-195, Gordon and Breach, New York 1962.

[7] CARDOSO, F. and J. HOUNIE. First order linear pde's and uniqueness in the Cauchy problem. *J. of diff. equ. 33* (1979), 239-248.

[8] COHEN, P. *The non-uniqueness of the Cauchy problem.* O.N.R. Techn. Report 93, Stanford 1960.

[9] HÖRMANDER, L. *Linear partial differential operators.* Springer Verlag, Berlin 1963.

[10] —— Non-uniqueness for the Cauchy problem. Lecture notes in Math. (Springer-Verlag) n° 459, *Fourier integral operators and pde's* (1975), 36-72.

[11] —— *The analysis of linear partial differential operators, T. I.* Springer-Verlag, Berlin 1983.

[12] LERNER, N. Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques. *Ann. Sc. de l'Ecole Normale Sup. 17* (1984), 469-505.

[13] —— Unicité de Cauchy pour des opérateurs différentiels faiblement principalement normaux. A paraître dans *J. de Math. pures et appliquées.*

[14] LERNER, N. et L. ROBBIANO. Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal. *Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983-84*, exposé n° IX (Ecole Polytechnique, Paris), et article à paraître dans *J. d'analyse math.*