Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES SURFACES EUCLIDIENNES À SINGULARITÉS CONIQUES

Autor: Troyanov, Marc

Kapitel: §2. Surfaces euclidiennes à singularités coniques définitions-exemples

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55079

§ 2. Surfaces euclidiennes à singularités coniques Définitions-exemples

Une surface euclidienne à singularités coniques est une surface possédant localement la géométrie du plan euclidien ou d'un cône standard. Plus précisément :

Définition. Soient S une surface, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ des points de S et $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ des nombres positifs. On dit que S a une *structure euclidienne avec singularités coniques* $x_1, x_2, \ldots$ d'angle $\theta_1, \theta_2, \ldots$, si $S_0 := S \backslash \{x_1\ x_2 \ldots\}$ possède une structure euclidienne pour laquelle x_i admet un voisinage isométrique à un voisinage du sommet dans le cône standard V_{θ_i}. La donnée de S et d'une telle structure sur S s'appelle une surface euclidienne à singularités coniques, on abrégera s.e.s.c.

Remarquons que si S est une s.e.s.c. alors les singularités forment un ensemble discret, en particulier si S est compacte, elles sont en nombre fini.

Exemples. 1) Les polyèdres de dimension 2 forment une vaste classe de s.e.s.c. Les points singuliers sont les sommets et leur angle est la somme des angles que chaque face incidente forme à ce sommet. (Un point sur une arête est un point régulier, on s'en convainc en dépliant un voisinage de ce point.)

2) Si G est un groupe d'isométries du plan $\mathbf{R}^2$ opérant de façon proprement discontinue et en préservant l'orientation, alors $\mathbf{R}^2/G$ est une s.e.s.c. Les points singuliers correspondent aux points du plan dont le stabilisateur est non trivial. Il s'agit alors d'un sous-groupe fini de G qui ne peut être qu'un groupe cyclique d'ordre m. L'angle en ce point conique est alors $2\pi/m$.

3) Si S est une surface de Riemann, toute différentielle quadratique (cf. § 4) définit une structure de s.e.s.c.

4) Si S est une surface euclidienne (avec ou sans singularités) et S' est un revêtement ramifié de S alors S' est une s.e.s.c. Si $p \in S$ est un point de branchement d'ordre m et si c'est de plus un point conique d'angle θ, alors tout point p' au-dessus de p est un point conique d'angle θm.