Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES SURFACES EUCLIDIENNES À SINGULARITÉS CONIQUES

Autor: Troyanov, Marc

Anhang: Appendice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55079

APPENDICE

Le but de cet appendice est de montrer comment le lemme utilisé dans la démonstration précédente découle du théorème de Hodge:

LEMME. *Soit* S *une surface de Riemann close,* $x_1, ..., x_n \in S$ *et* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$. *Supposons* $\sum_i \alpha_i = 0$. *Alors il existe une fonction harmonique* $h: S \to \mathbf{R}$ *avec singularités logarithmiques de poids* α_i *en* $x_i (i = 1, 2, ..., n)$.

Si h *et* h' *sont deux telles fonctions, elles diffèrent par une constante.*

Avant de prouver ce lemme, quelques rappels sur la théorie de Hodge seront nécessaires:

Si S est une surface de Riemann, alors S est munie d'une structure presque complexe, c'est-à-dire d'un morphisme (linéaire) de fibré $J: TS \to TS$ tel que $J^2 = -I$ (identité). J peut être défini à l'aide d'une métrique conforme en posant $Y = JX$ si et seulement si $\{X; Y\}$ est une base orthonormée d'orientation positive, pour tout vecteur unité X.
Si ω est une 1-forme sur S, on définit $*\omega$ par:

$$*\omega(X) = -\omega(JX);$$

$*$ est également un morphisme de fibré $*: T^*S \to T^*S$ tel que $*^2 = -1$.

Si $z = x + iy$ est une coordonnée sur S, alors

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = i\frac{\partial}{\partial z}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$*dx = dy, \; *dy = -dx, \; *dz = -idz, \; *d\bar{z} = id\bar{z}.$$

Si f est une fonction, on a

$$d*df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} idz \wedge d\bar{z}.$$

On dit qu'une 1-forme est *harmonique* si $d\omega = d*\omega = 0$, donc ω est harmonique si et seulement si c'est localement la différentielle d'une fonction harmonique.

THÉORÈME DE HODGE. *Si* ω *est une* 1*-forme différentielle sur* S, *alors il existe* $u, v \in C^\infty(S)$ *et* ω_0 *une* 1*-forme harmonique tels que*

$$\omega = \omega_0 + du + *dv .$$

Nous ne prouvons pas ce théorème ici (cf. [6] ou [8]).

Preuve du lemme.

Unicité. Soient h et h' deux fonctions harmoniques avec les mêmes singularités logarithmiques, alors $h-h'$ est une fonction harmonique sans singularités, donc constante puisque S est compacte.

Existence. Par linéarité, il suffit de montrer que si $p, q \in S$ alors il existe $h: S \to R$, harmoniques avec singularités logarithmiques de poids -1 en p et $+1$ en q (la fonction voulue s'obtient ensuite comme combinaison linéaire de telles fonctions). On peut, pour la même raison, supposer que p et q appartiennent à un même domaine U d'une coordonnée z. Soit D un sous-domaine contenant p et q et tel que $\bar{D} \subset U$. Donnons-nous ensuite une fonction lisse $\chi: S \to R$ telle que

$$\chi|_D = 1 \quad \text{et} \quad \chi|_{S-U} = 0 .$$

On définit $f: U \to \mathbf{C}$ par $f(z) = \chi(z) \log((z-q)/(z-p))$ et l'on étend à f à S tout entier en posant $f|_{S-U} = 0$. Considérons la 1-forme

$$\zeta = df - i*df = 2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} .$$

Remarquons que $\zeta = 0$ sur $D \cup (S-U)$.

Le théorème de Hodge permet d'écrire

$$\zeta = \omega_0 + du + *dv$$

avec ω_0 harmonique. Posons ensuite

$$\omega = df - du = \omega_0 + i*df + *dv ;$$

alors ω *est fermée* car $d\omega = d(df - du) = 0$, ω *est cofermée* car

$$** = -1 \quad \text{donc} \quad d*\omega = d*\omega_0 - id^2 f - d^2 v = 0 .$$

Donc ω est harmonique.

Posons

$$h = \operatorname{Re}(f-u) = \frac{1}{2}((f-u) + (\bar{f}-\bar{u})) ;$$

alors h est harmonique puisque

$$d{*}dh = \frac{1}{2}\, d{*}\big(d(f-u)+d(\bar{f}-\bar{\omega})\big) = \frac{1}{2}\, d{*}(\omega+\bar{\omega}) = 0\,.$$

h a clairement les singularités voulues. □

RÉFÉRENCES

[1] BERS, L. Quasi-Conformal Mapping and Teichmüller's theorems. In *Analytic function*, Princeton University Press, Princeton mathematical serie, No. 24.

[2] —— *Riemann surfaces.* Mimeographed Notes, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences (1958).

[3] CHERN, S. S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. Amer. Math. Soc. 6* (1955), 771-782.

[4] GROMOV, M. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* Textes mathématiques 1, CEDIC/Fernand-Nathan, 1981.

[5] HUBBARD, J. and H. MASUR. Quadratic differentials and foliations. *Acta. Math. 142, 3-4* (1979), 221-274.

[6] SPRINGER, G. *Introduction to Riemann Surfaces.* Addison Wesley, 1957.

[7] STREBEL, K. *Quadratic differentials.* Springer Verlag, 1984.

[8] WARNER, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Graduate text in Mathematics 94, Springer Verlag.

(Reçu le 12 décembre 1984)

Marc Troyanov

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
CH - 1211 Genève 24