

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1986)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UN RÉSULTAT DE TARSKI SUR LES ACTIONS MOYENNABLES DE GROUPES ET LES PARTITIONS PARADOXALES  
**Autor:** de la Harpe, Pierre / Skandalis, Georges  
**Kapitel:** 2. Paradoxes relatifs à une algèbre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55082>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\mu(X) = 1,$$

$$\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T) \quad \text{pour } S, T \in \mathfrak{B} \text{ avec } S \cap T = \emptyset,$$

$$\mu(T) = \mu(S) \quad \text{s'il existe } \gamma: S \rightarrow T \text{ dans } \mathfrak{G}.$$

Nous désignons par  $l^\infty(X)$  l'espace de Banach des fonctions bornées à valeurs réelles sur  $X$  avec la norme de la convergence uniforme, et par  $l^\infty(X, \mathfrak{B})$  l'adhérence dans  $l^\infty(X)$  du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des éléments de  $\mathfrak{B}$ . Alors  $\mathfrak{G}$  est moyennable si et seulement s'il existe une forme linéaire positive normalisée  $\mathfrak{G}$ -invariante sur  $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ , forme que nous notons aussi  $\mu$ . (Rappel de vocabulaire:  $\mu$  est positive si  $\mu(f) \geq 0$  pour tout  $f \in l^\infty(X, \mathfrak{B})$  à valeurs positives ou nulles,  $\mu$  est normalisée si  $\mu$  prend la valeur 1 sur la fonction constante de valeur 1, et  $\mu$  est  $\mathfrak{G}$ -invariante si  $\mu(f\gamma) = \mu(f)$  pour tout  $\gamma: S \rightarrow T$  dans  $\mathfrak{G}$  et pour tout  $f \in l^\infty(X, \mathfrak{B})$  à support dans  $T$ .) Pour l'équivalence entre les deux définitions de moyennabilité, voir le théorème 20.30 de [HS].

Etant donné un entier  $p \geq 1$ , on laisse au lecteur le soin de vérifier que  $\mathfrak{G}$  est moyennable si et seulement si  $\mathfrak{G}_p$  l'est. Plus généralement, si  $\mathfrak{G}$  agit sur  $(X, \mathfrak{B})$  et si  $U \in \mathfrak{B}$  est une grande partie de  $X$ , alors  $\mathfrak{G}$  est moyennable si et seulement si  $\mathfrak{G}_U$  est moyennable. (Voir aussi la proposition 12.)

## 2. PARADOXES RELATIFS À UNE ALGÈBRE

On considère à nouveau un ensemble non vide  $X$ , une algèbre  $\mathfrak{B}$  de parties de  $X$ , et un pseudogroupe  $\mathfrak{G}$  de transformations de  $(X, \mathfrak{B})$ .

**THÉORÈME 1.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $\mathfrak{G}$  n'est pas moyennable ;
- ii)  $\mathfrak{G}$  est virtuellement paradoxal.

*Preuve.* S'il existe un entier  $p \geq 1$  avec  $\mathfrak{G}_p$  faiblement paradoxal, il est évident que  $\mathfrak{G}_p$  n'est pas moyennable, et par suite  $\mathfrak{G}$  n'est pas moyennable ; donc ii) implique i).

Notons  $d^\infty(X, \mathfrak{B})$  le sous-espace vectoriel de  $l^\infty(X, \mathfrak{B})$  engendré par les différences  $\chi - \chi\gamma$ , avec  $\gamma: S \rightarrow T$  dans  $\mathfrak{G}$  et  $\chi$  la fonction caractéristique de  $T$ . Notons  $C$  le cône convexe ouvert de  $l^\infty(X, \mathfrak{B})$  formé des fonctions  $f$

pour lesquelles  $\inf_{x \in X} f(x) > 0$ . Une moyenne  $\mathfrak{G}$ -invariante sur  $(X, \mathfrak{B})$  est une forme linéaire continue  $\mu$  sur  $l^\infty(X, \mathfrak{B})$ , telle que la restriction  $\mu|_{d^\infty(X, \mathfrak{B})}$  soit nulle et telle que la restriction  $\mu|_C$  soit à valeurs strictement positives. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on en déduit que la condition i) est équivalente à  $d^\infty(X, \mathfrak{B}) \cap C \neq \emptyset$ . On suppose donc que  $d^\infty(X, \mathfrak{B})$  rencontre  $C$ , et il s'agit de montrer que  $\mathfrak{G}_p$  est faiblement paradoxal pour  $p$  assez grand.

Comme  $C$  est ouvert, il existe des éléments  $\gamma_j: S_j \rightarrow T_j$  dans  $\mathfrak{G}$  et des nombres rationnels  $n_j$  tels que la fonction

$$\sum_{j=1}^{m-1} n_j (\chi_j - \chi_j \gamma_j)$$

soit dans  $C$ , où  $\chi_j$  désigne la fonction caractéristique de  $T_j$ . En remplaçant quand il le faut  $\gamma_j$  par  $\gamma_j^{-1}$ , on peut rendre chaque  $n_j$  positif. Quitte à multiplier la fonction par un entier convenable, on peut aussi supposer les  $n_j$  entiers et la fonction minorée par la constante 1. En répétant les  $\gamma_j$ , on peut enfin supposer tous les  $n_j$  égaux à 1. On a donc

$$1 + \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j \gamma_j \leq \sum_{j=1}^{n-1} \chi_j$$

pour un entier  $n$  convenable. Notons  $\chi'_j = 1 - \chi_j \gamma_j$  la fonction caractéristique de  $X - S_j$  et ajoutons les  $\chi'_j$  à l'inégalité précédente; comme  $\chi_j \leq 1$  et  $\chi'_j \leq 1$  on obtient

$$n \leq f = \sum_{j=1}^{n-1} (\chi_j + \chi'_j) \leq 2n - 2.$$

On définit encore

$$R_f = \{(x, q) \in X_{2n-2} \mid q \leq f(x)\}$$

qui est dans  $\mathfrak{B}_{2n-2}$  car c'est le sous-graphe de la fonction  $\mathfrak{B}$ -mesurable  $f$ , et on note  $\pi_2: R_f \rightarrow X$  la projection canonique. L'inégalité  $n \leq f$  implique  $X_n \subset R_f$ .

Soit  $\Phi: X_{n-1} \rightarrow X_{2n-2}$  l'application injective définie par

$$\Phi(x, j) = (\gamma_j x, 2j-1) \quad \text{si } x \in S_j \quad \text{et} \quad \Phi(x, j) = (x, 2j) \quad \text{si } x \notin S_j.$$

Notons  $U$  l'image de  $\Phi$  et  $\pi_1: U \rightarrow X$  la projection canonique. Pour tout  $y \in X$ , le cardinal de  $\pi_1^{-1}(y)$  est précisément  $f(y)$ . Vu le lemme qui suit, il existe  $\Psi \in \mathfrak{G}_{2n-2}$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{c}
 X_n \\
 \cap \\
 X_{2n-2} \supset X_{n-1} \xrightarrow{\Phi} U \xrightarrow{\Psi} R_f \subset X_{2n-2} \\
 \pi_1 \searrow \swarrow \pi_2 \\
 X
 \end{array}$$

commute.

Soit  $\gamma$  la restriction à  $X_n$  de  $\Phi^{-1}\Psi^{-1}$ , qui est dans  $\mathfrak{G}_n$ . Soit  $\gamma_1 \in \mathfrak{G}_n$  l'itéré  $\gamma^n$  de  $\gamma$ ; on a  $\gamma(X_n) \subset X_{n-1}$ , de sorte que les ensembles  $X_n - X_{n-1}$ ,  $\gamma(X_n - X_{n-1})$ , ...,  $\gamma^{n-1}(X_n - X_{n-1})$ ,  $\gamma^n(X_n)$ , sont disjoints. Définissons  $\gamma_2 \in \mathfrak{G}_n$  par  $\gamma_2(x, q) = \gamma^{q-1}(x, n)$ . Alors  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont des buts disjoints, et  $\mathfrak{G}_n$  est bien faiblement paradoxal.  $\square$

L'existence de  $\Psi \in \mathfrak{G}_{2n-2}$  invoquée dans la preuve se justifie comme suit :

LEMME 2. *On considère un entier  $p \geq 1$  et deux parties  $U_1, U_2$  de  $X_p$ , dans  $\mathfrak{B}_p$ . On note  $\pi_j: U_j \rightarrow X$  la restriction à  $U_j$  de la projection canonique  $X_p = X \times I_p \rightarrow X (j=1, 2)$ , et on note  $\mathfrak{C}_p$  le pseudogroupe de transformations de  $(X_p, \mathfrak{B}_p)$  engendré par les applications  $\text{id}_X \times \sigma$  où  $\sigma$  est une bijection de  $I_p$ .*

*Si les cardinaux de  $\pi_1^{-1}(x)$  et  $\pi_2^{-1}(x)$  sont égaux pour tout  $x \in X$ , alors il existe  $\Psi \in \mathfrak{C}_p$  tel que le diagramme*

$$\begin{array}{c}
 U_1 \xrightarrow{\Psi} U_2 \\
 \pi_1 \searrow \swarrow \pi_2 \\
 X
 \end{array}$$

commute.

*Preuve.* Il suffit de montrer le lemme lorsque  $U_2$  est tel que  $(x, q) \in U_2$  implique  $(x, t) \in U_2$  pour  $t = 1, 2, \dots, q$  (cas d'un sous-graphe). Toute bijection  $U_1 \rightarrow U_2$  faisant commuter le diagramme peut s'écrire  $(x, q) \mapsto (x, r(x, q))$ . Il en existe une, unique, pour laquelle toutes les fonctions  $q \mapsto r(x, q)$  sont croissantes,  $x$  étant dans l'image de  $\pi_1$ ; on la note  $\Psi$ .

Pour tout  $t \in \{1, \dots, p\}$ , l'ensemble  $S_t = \{x \in X \mid (x, t) \in U_1\}$  est dans  $\mathfrak{B}$ , donc sa fonction caractéristique  $\chi_t$  est  $\mathfrak{B}$ -mesurable. Comme  $r(x, q) = \sum_{1 \leq t \leq q} \chi_t(x)$ , la fonction  $r$  est  $\mathfrak{B}_p$ -mesurable. Par suite l'application  $\Psi$  est  $\mathfrak{B}_p$ -mesurable.

Etant donnés  $q, s \in I_p$ , l'ensemble

$$A_{q,s} = \{x \in X \mid (x, q) \in U_1 \text{ et } \Psi(x, q) = (x, s)\}$$

est donc dans  $\mathfrak{B}$ . Si  $x \in A_{q,s}$ , alors  $\Psi(x, q) = (x, s)$ . Ceci étant vrai pour toute paire  $(q, s)$ , il en résulte que  $\Psi \in \mathfrak{C}_p$ .  $\square$

Le critère suivant peut faciliter la vérification qu'un pseudogroupe donné est faiblement (ou virtuellement) paradoxal. Il est du même type que, par exemple, le théorème 2.7 de [Sh].

PROPOSITION 3. Si  $\mathfrak{G}$  est un pseudogroupe de transformations d'un espace  $(X, \mathfrak{B})$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\mathfrak{G}$  est faiblement paradoxal.
- ii) Il existe un entier  $n \geq 2$  et des parties  $S_1, \dots, S_{n-1}, S_n, T_1, \dots, T_{n-1}$  dans  $\mathfrak{B}$  avec
  - les  $S_j$  sont disjoints deux à deux
  - $S_n$  est grand
  - $T_k$  est équivalent à une partie de  $S_k (k=1, \dots, n-1)$
  - $\left( \coprod_{1 \leq j \leq n} S_j \right) \subset \left( \bigcup_{1 \leq k \leq n-1} T_k \right)$ .
- iii) Il existe  $\gamma: X \rightarrow R$  dans  $\mathfrak{G}$  tel que  $X - R$  soit grand.

*Preuve.* L'implication i)  $\Rightarrow$  ii) est banale (avec  $n=2$ ,  $T=X$  et  $S_1, S_2$  les buts des bijections de la définition).

Si ii) est vrai, on peut supposer de plus les  $T_k$  disjoints deux à deux : sinon, on considère

$$T'_1 = T_1, T'_2 = T_2 - T_1, \dots, T'_{n-1} = T_{n-1} - (T_1 \cup \dots \cup T_{n-2}).$$

Supposons la condition ii) vérifiée, avec les  $T_k$  disjoints deux à deux. Posons  $T = \bigcup_{1 \leq k \leq n-1} T_k$ , et choisissons dans  $\mathfrak{G}$  une bijection  $\alpha$  de source  $T$  et de but  $S' \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n-1} S_j$ , obtenue en recollant des éléments  $T_j \rightarrow S'_j \subset S_j$ . Posons  $R = S' \cup (X - T)$ , et notons  $\gamma: X \rightarrow R$  la bijection qui coïncide avec  $\alpha$  sur  $T$  et avec l'identité sur  $X - T$ . La condition iii) est vérifiée, car  $X - R$  contient la grande partie  $S_n$ .

Supposons enfin la condition iii) vérifiée. Comme  $X - R$  est grand, il existe dans  $\mathfrak{G}$  des éléments  $\delta_j: S_j \rightarrow T_j$  avec  $S_j \subset X - R$  et les  $T_j$  disjoints deux à deux ( $j=1, \dots, N$ ), tels que  $X = \coprod_{1 \leq j \leq N} T_j$ . Les ensembles

$X - R, \gamma(X - R), \dots, \gamma^{N-1}(X - R), \gamma^N(X)$  sont disjoints deux à deux. Posons  $\gamma' = \gamma^N$ , et soit  $\gamma''$  la bijection de source  $X$  qui coïncide avec  $\gamma^{j-1}(\delta_j)^{-1}$  sur  $T_j$  pour  $j = 1, \dots, N$ . Comme les buts de  $\gamma'$  et  $\gamma''$  sont disjoints,  $\mathfrak{G}$  est faiblement paradoxal.  $\square$

Soient  $r$  et  $p$  des entiers avec  $r \geq p \geq 1$ . Comme nous l'avons déjà affirmé, il résulte de la proposition 3 que, si  $\mathfrak{G}_p$  est faiblement paradoxal, alors  $\mathfrak{G}_r$  l'est aussi. Plus généralement, soit  $\mathfrak{G}$  un pseudogroupe de transformations de  $(X, \mathfrak{B})$  et soit  $U \in \mathfrak{B}$  une grande partie de  $X$ ; si  $\mathfrak{G}_U$  est faiblement paradoxal, alors  $\mathfrak{G}$  l'est aussi.

### 3. PARADOXES RELATIFS À UNE $\sigma$ -ALGÈBRE

Un pseudogroupe  $\mathfrak{G}$  de transformations de  $(X, \mathfrak{B})$ , comme à la section 2, est dit *fortement paradoxal* s'il existe  $X_1, X_2$  avec  $X = X_1 \coprod X_2$  et  $X_j \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$  ( $j=1, 2$ ), ce que nous abrégeons par  $2X \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$ .

PROPOSITION 4. *On suppose que  $\mathfrak{B}$  est une  $\sigma$ -algèbre. Alors  $\mathfrak{G}$  est faiblement paradoxal si et seulement si  $\mathfrak{G}$  est fortement paradoxal.*

Insistons sur le fait que  $\mathfrak{G}$  est bien un pseudogroupe au sens précédent: la condition v) de la section 1 concerne toujours des recollements finis, même si  $\mathfrak{B}$  est stable par réunions infinies dénombrables.

LEMME 5. *S'il existe  $T, T' \in \mathfrak{B}$  avec  $T \cap T' = \emptyset$  et  $\gamma: X \rightarrow T$  dans  $\mathfrak{G}$ , alors il existe  $\gamma'': X \rightarrow X - T'$  dans  $\mathfrak{G}$ .*

*Preuve.* Posons  $U = \bigcup_{k \geq 0} \gamma^k(T')$ , de sorte que  $\gamma(U) = U - T'$ . On définit  $\gamma'' \in \mathfrak{G}$  de source  $X$  par  $\gamma'x = x$  si  $x \in X - U$  et  $\gamma''x = \gamma x$  si  $x \in U$ . Le but de  $\gamma''$  est  $(X - U) \cup \gamma(U) = X - T'$ .  $\square$

*Preuve de la proposition.* Supposons  $\mathfrak{G}$  faiblement paradoxal: il existe deux éléments  $\gamma: X \rightarrow T$  et  $\gamma': X \rightarrow T'$  de  $\mathfrak{G}$  avec  $T \cap T' = \emptyset$ . Alors  $\gamma'$  et l'élément  $\gamma''$  du lemme 5 sont des bijections dans  $\mathfrak{G}$  ayant  $X$  pour source et dont les buts forment une partition de  $X$ .  $\square$