

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 32 (1986)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UN RÉSULTAT DE TARSKI SUR LES ACTIONS MOYENNABLES DE GROUPES ET LES PARTITIONS PARADOXALES  
**Autor:** de la Harpe, Pierre / Skandalis, Georges  
**Kapitel:** 3. Paradoxes relatifs à une -algèbre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55082>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$X - R, \gamma(X - R), \dots, \gamma^{N-1}(X - R), \gamma^N(X)$  sont disjoints deux à deux. Posons  $\gamma' = \gamma^N$ , et soit  $\gamma''$  la bijection de source  $X$  qui coïncide avec  $\gamma^{j-1}(\delta_j)^{-1}$  sur  $T_j$  pour  $j = 1, \dots, N$ . Comme les buts de  $\gamma'$  et  $\gamma''$  sont disjoints,  $\mathfrak{G}$  est faiblement paradoxal.  $\square$

Soient  $r$  et  $p$  des entiers avec  $r \geq p \geq 1$ . Comme nous l'avons déjà affirmé, il résulte de la proposition 3 que, si  $\mathfrak{G}_p$  est faiblement paradoxal, alors  $\mathfrak{G}_r$  l'est aussi. Plus généralement, soit  $\mathfrak{G}$  un pseudogroupe de transformations de  $(X, \mathfrak{B})$  et soit  $U \in \mathfrak{B}$  une grande partie de  $X$ ; si  $\mathfrak{G}_U$  est faiblement paradoxal, alors  $\mathfrak{G}$  l'est aussi.

### 3. PARADOXES RELATIFS À UNE $\sigma$ -ALGÈBRE

Un pseudogroupe  $\mathfrak{G}$  de transformations de  $(X, \mathfrak{B})$ , comme à la section 2, est dit *fortement paradoxal* s'il existe  $X_1, X_2$  avec  $X = X_1 \coprod X_2$  et  $X_j \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$  ( $j=1, 2$ ), ce que nous abrégeons par  $2X \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$ .

PROPOSITION 4. *On suppose que  $\mathfrak{B}$  est une  $\sigma$ -algèbre. Alors  $\mathfrak{G}$  est faiblement paradoxal si et seulement si  $\mathfrak{G}$  est fortement paradoxal.*

Insistons sur le fait que  $\mathfrak{G}$  est bien un pseudogroupe au sens précédent: la condition v) de la section 1 concerne toujours des recollements finis, même si  $\mathfrak{B}$  est stable par réunions infinies dénombrables.

LEMME 5. *S'il existe  $T, T' \in \mathfrak{B}$  avec  $T \cap T' = \emptyset$  et  $\gamma: X \rightarrow T$  dans  $\mathfrak{G}$ , alors il existe  $\gamma'': X \rightarrow X - T'$  dans  $\mathfrak{G}$ .*

*Preuve.* Posons  $U = \bigcup_{k \geq 0} \gamma^k(T')$ , de sorte que  $\gamma(U) = U - T'$ . On définit  $\gamma'' \in \mathfrak{G}$  de source  $X$  par  $\gamma'x = x$  si  $x \in X - U$  et  $\gamma''x = \gamma x$  si  $x \in U$ . Le but de  $\gamma''$  est  $(X - U) \cup \gamma(U) = X - T'$ .  $\square$

*Preuve de la proposition.* Supposons  $\mathfrak{G}$  faiblement paradoxal: il existe deux éléments  $\gamma: X \rightarrow T$  et  $\gamma': X \rightarrow T'$  de  $\mathfrak{G}$  avec  $T \cap T' = \emptyset$ . Alors  $\gamma'$  et l'élément  $\gamma''$  du lemme 5 sont des bijections dans  $\mathfrak{G}$  ayant  $X$  pour source et dont les buts forment une partition de  $X$ .  $\square$

Lorsque  $\mathfrak{B}$  est une  $\sigma$ -algèbre, on peut donc dire sans ambiguïté que  $\mathfrak{G}$  est *paradoxal* s'il l'est faiblement ou/et fortement. La condition ii) du théorème 1 peut s'écrire:  $\mathfrak{G}_p$  est paradoxal pour  $p$  assez grand.

REMARQUE 6. *Le lemme 5 est équivalent à l'énoncé suivant, plus classique, du type Cantor-Bernstein:*

*S'il existe  $\delta: S \rightarrow R$  et  $\delta': S' \rightarrow R'$  dans  $\mathfrak{G}$  avec  $R \subset S'$  et  $R' \subset S$ , alors  $S' \equiv S \pmod{\mathfrak{G}}$ .*

*Preuve.* Posons  $\gamma = \delta'\delta: S \rightarrow T$  et  $T' = S - R'$ ; on a  $T \subset R' \subset S$ . Par le lemme 5 (appliqué dans  $S$ ), il existe dans  $\mathfrak{G}$  un élément  $\gamma'': S \rightarrow R'$ . Par suite  $(\delta')^{-1}\gamma'': S \rightarrow S'$  est une équivalence dans  $\mathfrak{G}$ .  $\square$

COROLLAIRE 7. *On suppose que  $\mathfrak{B}$  est une  $\sigma$ -algèbre. Soient  $U, V, U', V' \in \mathfrak{B}$  des grandes parties avec  $U \subset U'$  et  $V \subset V'$ . Si  $\mathfrak{G}_U$  et  $\mathfrak{G}_V$  sont paradoxaux, alors  $U' \equiv V' \pmod{\mathfrak{G}}$ .*

*Preuve.* Il suffit de montrer que  $U' \equiv X \pmod{\mathfrak{G}}$ . Comme  $U$  est grand, il existe un entier  $N$  et une bijection  $\alpha: X \times \{1\} \rightarrow U_1$  dans  $\mathfrak{G}_N$  avec  $U_1 \subset U \times I_N$ . Comme  $\mathfrak{G}_U$  est paradoxal, il existe  $\beta: U \times I_N \rightarrow U \times \{1\}$  dans  $\mathfrak{G}_N$ . La composition de  $\alpha$  et  $\beta$  fournit une bijection  $\gamma: X \rightarrow T$  de  $\mathfrak{G}$  avec  $T \subset U \subset U'$ . On conclut en utilisant le lemme 5 (avec  $T' = X - U'$ ).  $\square$

Notons que nous aurions pu formuler ce corollaire sans introduire  $U$  et  $V$ , car  $U$  est grand dans  $U'$ , et par suite  $\mathfrak{G}_{U'}$  est paradoxal vu la dernière remarque de la section 2. Mais l'énoncé choisi correspond mieux à l'utilisation en vue, pour l'exemple 3 de la section 5.

#### 4. PARADOXES RELATIFS À L'ALGÈBRE DE TOUTES LES PARTIES

On se donne un ensemble  $X$  et un pseudogroupe  $\mathfrak{G}$  de transformations de  $X$ , ou plus précisément de  $(X, \mathfrak{P}(X))$ . L'outil nouveau est un lemme de Kuratowski [K].

LEMME 8. *On se donne un ensemble  $X$ , deux partitions  $X = S \amalg T = U \amalg V$ , ainsi que deux bijections  $\varphi: S \rightarrow T$  et  $\psi: U \rightarrow V$ . Alors il existe deux partitions*