Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MOYENNABILITÉ INTÉRIEURE DES GROUPES: DÉFINITIONS ET EXEMPLES

Autor: Bédos, Erik / de la Harpe, Pierre

Kapitel: §3. Exemples de groupes non intérieurement moyennables

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55083

Preuve. Soit $\rho : G \to U(H)$ une représentation unitaire contenant faiblement la représentation triviale $\varepsilon : G \to U(\mathbf{C}) = \mathbf{S}^1$. Alors la restriction π de ρ à $SL(3, \mathbf{R})$ contient faiblement la représentation triviale de $SL(3, \mathbf{R})$. Ce groupe possédant la propriété T [DK], il existe un vecteur unité $\xi \in H$ avec $\pi(h)\xi = \xi$ pour tout $h \in SL(3, \mathbf{R})$. Notons $f : G \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $f(g) = (\rho(g)\xi \mid \xi)$, qui vaut 1 sur $SL(3, \mathbf{R})$. On a $f(hgh^{-1}) = f(g)$ pour tout $h \in SL(3, \mathbf{R})$ et pour tout $g \in G$. Comme l'action de $SL(3, \mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^3$ possède un orbite dense (le complémentaire de l'origine), il en résulte que f est constante sur G, donc que ρ contient fortement ε. Ainsi G possède la propriété T.

Comme Γ est de covolume fini dans G, il possède aussi la propriété T. □

Le lemme 4 fournit un nouvel exemple de produit semi-direct

$$1 \to \mathbf{Z}^3 \to SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3 \to SL(3, \mathbf{Z}) \to 1 \qquad \text{(B)}$$

avec noyau moyennable et les deux autres groupes non intérieurement moyennables.

En posant enfin

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \mathbf{F}_\infty \times \mathbf{Z}^3 , \\ \Gamma &= \mathbf{F}_2 \times \big(SL(3, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3\big) , \\ \Gamma'' &= \mathbf{Z} \times SL(3, \mathbf{Z}) , \end{aligned}$$

on obtient par produit direct à partir de (A) et (B) une extension scindée

$$1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$$

où Γ' et Γ'' sont intérieurement moyennables et où Γ ne l'est pas. On trouve d'autres résultats sur la moyennabilité intérieure des produits semi-directs dans [Ch2].

Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini d'un groupe Γ. Quelles sont les relations entre la moyennabilité intérieure de Γ' et celle de Γ ? (Voir ajout.)

§ 3. Exemples de groupes non intérieurement moyennables

Le corollaire 3 (i) fournit à volonté des groupes non intérieurement moyennables qui apparaissent naturellement en géométrie.

En effet, soit G un groupe de Lie réel connexe semi-simple à centre trivial dont chaque composante simple est de rang réel au moins 2, et soit Γ

un réseau dans G; plus simplement, soit par exemple $\Gamma = PSL(n, \mathbf{Z})$ avec $n \geqslant 3$. On sait que Γ est un groupe à classes de conjugaison infinies (chap. I de [Ra]), qu'il possède la propriété T [DK], et qu'il n'est donc pas intérieurement moyennable. Pour le facteur associé, voir [C3].

Voici d'autres exemples.

THÉORÈME 5. *Si un groupe Γ admet l'une au moins des descriptions suivantes, alors Γ n'est pas intérieurement moyennable et le facteur $\lambda(\Gamma)''$ est plein.*

(a) *Γ est un sous-groupe de $PSL(2, \mathbf{R})$ qui n'est pas résoluble.*

(b) *Γ est un sous-groupe de $PSL(2, \mathbf{C})$ qui ne contient pas de sous-groupe résoluble d'indice fini.*

(c) *Γ est un produit libre $H*K$ où H possède au moins 2 et K au moins 3 éléments.*

(d) *$\Gamma = H \ast_A K$ est un produit libre avec amalgamation sur un sous-groupe $A \neq \{1\}$ de H et K tel que, pour tout sous-ensemble fini F de $\Gamma - \{1\}$, il existe $g \in \Gamma$ avec $g^{-1}Fg \cap A = \emptyset$.*

(e) *$\Gamma = HNN(H, A, \Theta)$ est une extension à la G. Higman, B.H. Neumann et H. Neumann avec $|H/A| \geqslant 3$ telle que, pour tout sous-ensemble fini F de $\Gamma - \{1\}$, il existe $g \in \Gamma$ avec $g^{-1}Fg \cap A = \emptyset$.*

(f) *Γ est un produit direct d'un nombre fini de groupes apparaissant dans les classes (a) à (e).*

La liste de ce théorème est en substance bien connue. Pour les groupes de (a) et (b) qui sont discrets, voir [HJ]. Pour ceux de (c) et de nombreux groupes de (a), voir [Ak]. Pour la plupart des groupes de (d) et (e), voir [B1] et [B2]. Pour (f), voir le corollaire 3 (ii). Ce que nous croyons être nouveau ci-dessous est l'usage d'un argument simple commun à presque tous les cas du théorème (seul cas plus compliqué: classe (b) lorsqu'il y a de la 2-torsion).

* * *

Un homéomorphisme φ d'un espace topologique séparé Ω est dit *hyperbolique* s'il existe deux points fixes distincts s_φ, r_φ de φ dans Ω avec les propriétés suivantes:

pour tout voisinage S de s_φ et pour tout voisinage R de r_φ, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que $\varphi^n(\Omega - S) \subset R$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Un tel homéomorphisme φ n'a pas d'autres points fixes que sa *source* s_φ et son *but* r_φ; pour tout entier $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$, on vérifie que $\psi = \varphi^k$ est aussi hyperbolique avec

$$s_\psi = \begin{cases} s_\varphi & \text{si} \quad k > 0 \\ r_\varphi & \text{si} \quad k < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad r_\psi = \begin{cases} r_\varphi & \text{si} \quad k > 0 \\ s_\varphi & \text{si} \quad k < 0 \,. \end{cases}$$

Nous excluons désormais le cas où Ω ne contient pas au moins 3 points distincts; s'il existe un homéomorphisme hyperbolique de Ω, cet espace est donc toujours infini.

LEMME 6. *Soit φ un homéomorphisme hyperbolique d'un espace topologique séparé infini Ω; soient S' (respectivement R') un voisinage de s_φ (respectivement r_φ), et F un sous-ensemble fini de $\Omega - \{s_\varphi, r_\varphi\}$. Alors il existe un voisinage S de s contenu dans S' et un entier $k \geqslant 1$ tels que l'homéomorphisme $\psi = \varphi^k$ ait les propriétés*

(i) $S \subset S'$ *et* $R = \Omega - \psi(S) \subset R'$,

(ii) $S \subset \psi(S)$,

(iii) F *est dans l'intérieur de* $D = \psi(S) - S$,

(iv) $\Omega - \{s_\psi, r_\psi\} = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} \psi^n(D)$ *où* $\coprod$ *désigne une réunion disjointe.*

Preuve. Comme Ω est séparé, il existe des voisinages disjoints deux à deux S'', V, R'' de s_φ, F, r_φ respectivement avec $S'' \subset S'$ et $R'' \subset R'$. Par hyperbolicité de φ vers la source, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que $\varphi^{-n}(S'') \subset S''$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. On pose $S = \bigcap_{j=0}^{n_0 - 1} \varphi^{-j}(S'')$ de sorte que $S \subset S''$ et $S \subset \varphi(S)$. Par hyperbolicité de φ vers le but, il existe un entier $k > 0$ tel que $\varphi^n(\Omega - S) \subset R''$, donc en particulier tel que $S \cup V \subset \varphi^n(S)$ pour tout $n \geqslant k$. On pose $\psi = \varphi^k$ et $R = \Omega - \psi(S) = \psi(\Omega - S)$. Reste à vérifier (iv).

Soit $D = \psi(S) - S$. Il est évident que les ensembles $\psi^n(D)$ sont disjoints deux à deux $(n \in \mathbf{Z})$. Soit $\omega \in \Omega - \{s_\psi, r_\psi\}$. Vu que $\psi^n(\omega)$ tend vers s_ψ (respectivement r_ψ) quand n tend vers $-\infty$ (respectivement ∞), il existe $m \in \mathbf{Z}$ avec $\psi^{m-1}(\omega) \in S$ et $\psi^m(\omega) \notin S$, donc avec $\psi^m(\omega) \in D$. □

L'espace Ω étant comme plus haut, deux homéomorphismes hyperboliques φ et ψ de Ω sont *transverses* s'ils n'ont pas de point fixe commun. Dans ce cas, il existe une suite infinie $(n_j)_{j=1,2,\ldots}$ d'entiers telle que les homéomorphismes hyperboliques $\varphi^{n_j}\psi\varphi^{-n_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ soient transverses deux à deux.

PROPOSITION 7. *Soient Ω un espace topologique séparé infini et Γ un groupe d'homéomorphismes de Ω contenant deux homéomorphismes hyperboliques transverses. S'il existe une application Γ-équivariante $\delta : \Gamma - \{1\} \to \Omega$ (pour l'action de Γ sur lui-même par automorphismes intérieurs), alors Γ n'est pas intérieurement moyennable.*

Preuve. Soient $g, h \in \Gamma$ deux éléments hyperboliques transverses. Quitte à remplacer g par une puissance convenable, on déduit du lemme qu'il existe un voisinage S_g de s_g tel que

(i) s_h, r_h sont dans l'intérieur de $D_g = g(S_g) - S_g$

(ii) $\Omega - \{s_g, r_g\} = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} g^n(D_g)$.

Quitte à remplacer ensuite h par une puissance convenable, on s'assure de même qu'il existe un voisinage S_h de s_h tel que

(iii) S_h et $R_h = \Omega - h(S_h)$ sont dans D_g

(iv) $\Omega - \{s_h, r_h\} = \coprod_{n \in Z} h^n(D_h)$ avec $D_h = \Omega - (S_h \cup R_h)$.

Posons enfin

$$T = \{k \in \Gamma - \{1\} \mid \delta(k) \in S_g \cup R_g\}.$$

On a $\Omega = (S_g \cup R_g) \cup g(S_g \cup R_g)$, donc $\Gamma - \{1\} = T \cup gTg^{-1}$. On a aussi $S_g \cup R_g \subset D_h$, donc les $h^n(S_g \cup R_g)$ sont des parties de Ω disjointes deux à deux, et par suite les $h^n T h^{-n}$ sont disjoints deux à deux dans $\Gamma (n \in \mathbf{Z})$. Par suite Γ ne satisfait pas la condition (Ta'), donc Γ n'est pas intérieurement moyennable. (Voir la preuve de $(M) \Leftrightarrow (Ta)$ au § 1.) □

Preuve du théorème.

Classe (a). On choisit pour Ω le disque unité fermé du plan complexe sur lequel $PSL(2, \mathbf{R})$, déguisé en $PSU(1, 1)$, agit par transformations linéaires fractionnaires. On définit $\delta(k)$ comme étant l'attracteur de k si k est hyperbolique et le point fixe de k dans Ω sinon. L'hypothèse que Γ n'est pas résoluble implique que Γ contient deux hyperboliques transverses (détails dans [Ha]). Notons que le choix de δ est limité; pour tout $g \in \Gamma - \{1\}$, on doit en effet avoir en vertu de l'équivariance $g\delta(g) = \delta(ggg^{-1}) = \delta(g)$.

Classe (b). On choisit pour Ω la réunion de l'espace hyperbolique de dimension 3 (dont $PSL(2, \mathbf{C})$ est le groupe des isométries préservant l'orientation) et de son bord (sur lequel l'action de $PSL(2, \mathbf{C})$ s'étend naturellement); Ω est donc une boule fermée de dimension 3.

Supposons d'abord que Γ ne contienne aucun élément $g \neq 1$ avec $g^2 = 1$. On définit $\delta(k)$ comme pour la classe (a) si k est hyperbolique ou parabolique. Sinon, k est elliptique: c'est une rotation d'angle $\Theta_k \in]0, \pi[$ autour d'une droite hyperbolique d_k; on choisit pour $\delta(k)$ le point à l'infini de d_k donné par la règle du tire-bouchon.

Pour le cas général, reprenons la preuve légèrement plus compliquée de [HJ]. On choisit deux hyperboliques $g, h \in \Gamma$ avec les propriétés suivantes:

(1) Il existe un domaine D_g limité par deux hyperplans de Ω tel que $\Omega - \{s_g, r_g\} = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} g^n(D_g)$; on pose $E = \{s_g, r_g\} \cup \coprod_{n \text{ pair}} g^n(D_g)$.

(2) Il existe un domaine D_h limité par deux hyperplans de Ω tel que $\Omega - D_h \subset D_g$. On note S_h la composante connexe de $\Omega - D_h$ contenant s_h.

(3) Toute droite hyperbolique de Ω dont les deux points à l'infini sont dans E ne rencontre pas $\Omega - D_h$.

On définit alors T comme l'ensemble des $k \in \Gamma$ ayant au moins un point fixe dans E et n'ayant pas de point fixe dans S_h.

Classes (c), (d), (e). L'espace Ω est la réunion du graphe X et de l'espace L de ses bouts, comme définis dans [Ha]. On prend pour $\delta(k)$ l'attracteur de k dans L si k est hyperbolique et le point fixe de k dans X si k est elliptique. □

COROLLAIRE 8. *Si Γ est un groupe admettant une présentation avec $n \geqslant 3$ générateurs et une seule relation, alors Γ n'est pas intérieurement moyennable.*

Preuve. Si la relation ne contient qu'un générateur, Γ est décrit comme dans la classe (c) du théorème 5. Si la relation contient au moins deux générateurs, on peut la supposer cycliquement réduite, et il suffit de contempler les lemme 11.8, théorème 5.1 (cas 1 de la preuve) et théorème 11.9 dans [Z]. □

Soit Γ le groupe des classes d'applications d'une surface close orientable de genre $g \geqslant 3$. (On suppose $g \geqslant 3$ pour que Γ soit à centre trivial [Ma].) Le théorème 5 s'applique-t-il à Γ, avec une preuve en termes de l'action naturelle de Γ sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller de la surface?