Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS DE LA DOUBLE FLÈCHE

Autor: Burgermeister, Pierre-François

Kapitel: 1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55086

L'Enseignement Mathématique, t. 32 (1986), p. 199-210

CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS DE LA DOUBLE FLÈCHE

par Pierre-François BURGERMEISTER

On connaît depuis assez longtemps la classification des représentations de la double flèche. J. Dieudonné [1] l'a obtenue pour un corps algébriquement clos, après avoir dressé un bref historique de la question. L'intérêt du présent article est de donner un traitement nouveau et particulièrement simple du problème. De plus, on prendra ici, comme corps de base, un corps commutatif quelconque.

Cet article est une version légèrement remaniée du travail de diplôme que j'ai présenté à l'Université de Genève. J'ai bénéficié pour l'élaborer de l'aide du professeur M. Kervaire; je tiens à lui exprimer ici mes remerciements.

1. INTRODUCTION

Soit k un corps. Une k-représentation de la double flèche est la donnée de 2 espaces vectoriels sur k de dimensions finies, E et F, et de 2 applications linéaires f_1 et f_2, de E dans F. On note: $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$.

Deux représentations, $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$ et $E' \underset{f'_2}{\overset{f'_1}{\rightrightarrows}} F'$, sont isomorphes s'il existe $\varphi : E \to E'$ et $\psi : F \to F'$, des isomorphismes d'espaces vectoriels, tels que le diagramme double

$$\begin{array}{ccc} E & \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} & F \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ E' & \underset{f'_2}{\overset{f'_1}{\rightrightarrows}} & F' \end{array}$$

commute. C'est-à-dire: $\psi f_1 = f'_1\varphi$ et $\psi f_2 = f'_2\varphi$.

La somme directe de 2 représentations est définie par:

$$\left(E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F\right) \oplus \left(E' \underset{f'_2}{\overset{f'_1}{\rightrightarrows}} F'\right) = E\oplus E' \underset{f_2\oplus f'_2}{\overset{f_1\oplus f'_1}{\rightrightarrows}} F\oplus F',$$

où $(f_i\oplus f'_i)(x+x') = f_i(x)+f'_i(x')$, $\forall x \in E$, $\forall x' \in E'$.

Les représentations sont en correspondance bijective avec les A-modules, où A est une algèbre de dimension finie [2]. Dans ce contexte, on peut appliquer le théorème de Krull-Schmidt ([3], p. 128), d'où il découle qu'une représentation se décompose de manière unique (à isomorphisme près, et à l'ordre des facteurs près) en une somme directe de représentations indécomposables. La classification s'obtient alors en dressant la liste de toutes les représentations indécomposables (à isomorphisme près).

2. Généralités

Il est clair qu'une représentation $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$ est indécomposable si et seulement si la représentation duale, $F^* \underset{f_2^*}{\overset{f_1^*}{\rightrightarrows}} E^*$, est indécomposable. On peut donc se limiter à l'étude des représentations indécomposables $A: E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$, avec $\dim E \leqslant \dim F$.

Cas triviaux

a) Supposons $K = \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 \neq 0$. Alors A, indécomposable, se réduit à: $K \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} 0$ et, nécessairement, $\dim K = 1$. Ecrivons $k \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} 0$ la représentation ainsi obtenue et notons-la B_0.

b) Supposons $\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 \underset{\neq}{\subset} F$, et soit $G \neq 0$, un supplémentaire de $\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2$ dans F. A se réduit donc à $0 \rightrightarrows G$, et de nouveau, on doit avoir $\dim G = 1$. Ecrivons $0 \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} k$ cette représentation et notons-la C_0.