Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1986)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS DE LA DOUBLE FLÈCHE

Autor: Burgermeister, Pierre-François

Kapitel: 2. GÉNÉRALITÉS

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55086

commute. C'est-à-dire: $\psi f_1 = f'_1\varphi$ et $\psi f_2 = f'_2\varphi$.

La somme directe de 2 représentations est définie par:

$$(E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F) \oplus (E' \underset{f'_2}{\overset{f'_1}{\rightrightarrows}} F') = E\oplus E' \underset{f_2\oplus f'_2}{\overset{f_1\oplus f'_1}{\rightrightarrows}} F\oplus F',$$

où $(f_i\oplus f'_i)(x+x') = f_i(x)+f'_i(x')$, $\forall x \in E$, $\forall x' \in E'$.

Les représentations sont en correspondance bijective avec les A-modules, où A est une algèbre de dimension finie [2]. Dans ce contexte, on peut appliquer le théorème de Krull-Schmidt ([3], p. 128), d'où il découle qu'une représentation se décompose de manière unique (à isomorphisme près, et à l'ordre des facteurs près) en une somme directe de représentations indécomposables. La classification s'obtient alors en dressant la liste de toutes les représentations indécomposables (à isomorphisme près).

2. Généralités

Il est clair qu'une représentation $E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$ est indécomposable si et seulement si la représentation duale, $F^* \underset{f_2^*}{\overset{f_1^*}{\rightrightarrows}} E^*$, est indécomposable. On peut donc se limiter à l'étude des représentations indécomposables $A: E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$, avec $\dim E \leqslant \dim F$.

Cas triviaux

a) Supposons $K = \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 \neq 0$. Alors A, indécomposable, se réduit à: $K \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} 0$ et, nécessairement, $\dim K = 1$. Ecrivons $k \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} 0$ la représentation ainsi obtenue et notons-la B_0.

b) Supposons $\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 \underset{\neq}{\subset} F$, et soit $G \neq 0$, un supplémentaire de $\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2$ dans F. A se réduit donc à $0 \rightrightarrows G$, et de nouveau, on doit avoir $\dim G = 1$. Ecrivons $0 \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} k$ cette représentation et notons-la C_0.

B_0 et C_0 sont 2 représentations indécomposables. Pour la suite nous supposons

$$1)\quad \operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 = 0$$
$$2)\quad \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 = F$$

CAS GÉNÉRAL

Soit $A: E \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} F$, une représentation indécomposable avec $\dim E = n$, $\dim F = n+l$, $n \geqslant 1$ et $l \geqslant 0$ des entiers, A vérifiant les hypothèses 1 et 2 ci-dessus.

Nous allons mettre en évidence certains sous-espaces de E et de F qui nous permettront d'obtenir une décomposition de A. Cette décomposition étant par hypothèse triviale, nous pourrons en tirer, cas par cas, toutes les conclusions nécessaires à l'identification de A.

Notons n_1 et n_2 les dimensions des noyaux de f_1 et f_2 respectivement, et posons $m = n_1+n_2$ et $W = \operatorname{Im} f_1 \cap \operatorname{Im} f_2 \subset F$. Alors, $\dim W = n-m-l$.

En effet, $\dim \operatorname{Im} f_1 + \dim \operatorname{Im} f_2 = n-n_1 + n-n_2 = 2n-m$. Par l'hypothèse 2, $\dim W = 2n-m-(n+l) = n-m-l$.

D'autre part, soit $V = f_1^{-1}(W) \cap f_2^{-1}(W) \subset E$. Alors, $\dim V \geqslant n-m-2l$.

En effet, $\dim f_1^{-1}(W) = n-m-l+n_1 = n-n_2-l$, et de même $\dim f_2^{-1}(W) = n-n_1-l$. Donc, $\dim f_1^{-1}(W) + \dim f_2^{-1}(W) = 2n-m-2l$ et $\dim V \geqslant 2n-m-2l-n = n-m-2l$. Posons $\dim V = n-m-2l+r$, $r \geqslant 0$.

Nous avons une sous-représentation, $V = \underset{\operatorname{res} f_2}{\overset{\operatorname{res} f_1}{\rightrightarrows}} W$, avec $\dim V = n-m-2l+r$, $\dim W = n-m-l$.

Posons maintenant $K_1 = \operatorname{Ker} f_1 \cap V$ et $k_1 = \dim K_1$, et soit un sous-espace K'_1 tel que $\operatorname{Ker} f_1 = K_1 \oplus K'_1$. Notons $k'_1 = \dim K'_1$; alors $n_1 = k_1+k'_1$. On peut encore choisir un supplémentaire L_1 tel que $f_1^{-1}(W) = V \oplus K'_1 \oplus L_1$. Soit $l_1 = \dim L_1$; alors $l_1 = n-n_2-l-(n-m-2l+r)-k'_1 = k_1+l-r$.

De la même manière, on choisit une décomposition $f_2^{-1}(W) = V \oplus K'_2 \oplus L_2$.

La somme $(V \oplus K'_1 \oplus L_1) + (K'_2 \oplus L_2)$ est une somme *directe*.

En effet, soit $x \in V \oplus K'_1 \oplus L_1 \cap K'_2 \oplus L_2$. Alors $x \in f_1^{-1}(W) \cap f_2^{-1}(W) = V$. Mais $V \cap (K'_2 \oplus L_2) = 0$, d'où $x = 0$.

Calculons la dimension d du sous-espace $V \oplus K'_1 \oplus L_1 \oplus K'_2 \oplus L_2$: $d = n-m-2l+r+k'_1+k_1+l-r+k'_2+k_2+l-r = n-r$. Choisissons alors $X \subset E$, un sous-espace de dimension r tel que

$$E = V \oplus K'_1 \oplus L_1 \oplus K'_2 \oplus L_2 \oplus X .$$

Soit maintenant $Y = f_1(X) + f_2(X) \subset F$. Alors,

$$F = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = W + f_2(K'_1) + f_2(L_1) + f_1(K'_2) + f_1(L_2) + Y .$$

La dimension de F est inférieure ou égale à s, la somme des dimensions des sous-espaces du membre de droite:

$$n+l \leqslant s \leqslant n-m-l+k'_1+k_1+l-r+k'_2+k_2+l-r+2r = n+l .$$

Par conséquent:

i) $K'_1 \overset{\operatorname{res} f_2}{\to} f_2(K'_1)$, $L_1 \overset{\operatorname{res} f_2}{\to} f_2(L_1)$, $K'_2 \overset{\operatorname{res} f_1}{\to} f_1(K'_2)$,

$L_2 \overset{\operatorname{res} f_1}{\to} f_1(L_2)$,

sont des isomorphismes.

ii) $\dim Y = 2r$.

iii) $F = W \oplus f_2(K'_1) \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(K'_2) \oplus f_1(L_2) \oplus Y$.

On a obtenu la description suivante de la structure de A:

$$E = V \oplus K'_1 \oplus L_1 \oplus K'_2 \oplus L_2 \oplus X ,$$

$$F = W \oplus f_2(K'_1) \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(K'_2) \oplus f_1(L_2) \oplus Y ,$$

où $V \oplus L_1 \oplus L_2 \rightrightarrows W \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(L_2)$, $K'_1 \rightrightarrows f_2(K'_1)$, $K'_2 \rightrightarrows f_1(K'_2)$ et $X \rightrightarrows Y$ sont des sommands directs. A étant indécomposable, elle se réduit à l'un de ces 4 sommands.

Elimination des cas simples

1) Si A est du type $K'_1 \underset{\operatorname{res} f_2}{\overset{0}{\rightrightarrows}} f_2(K'_1)$, elle n'est indécomposable que si $\dim K'_1 = 1$ et elle est alors isomorphe à la représentation $E \underset{1}{\overset{0}{\rightrightarrows}} E$ où $\dim E = 1$. Appelons $\overline{A_1^x}$ cette représentation indécomposable. (Cette notation et les suivantes seront justifiées au § 3).

2) De même, si A est du type $K'_2 \underset{0}{\overset{\operatorname{res} f_1}{\rightrightarrows}} f_1(K'_2)$, elle est isomorphe à la

représentation indécomposable $E \overset{1}{\underset{0}{\rightrightarrows}} E$, où dim $E = 1$, que nous appellerons A_1^x.

3) Si A est du type $X \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} Y$, alors, comme $\dim Y = 2 \dim X$, A n'est indécomposable que si $\dim X = 1$, $\dim Y = 2$ et $Y = f_1(X) \oplus f_2(X)$. Elle est alors isomorphe à la représentation suivante, notée matriciellement:

$$E \overset{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{\rightrightarrows}} F$$

(avec $\dim E = 1$, $\dim F = 2$). Nous appellerons B_1 cette représentation indécomposable.

Il ne reste plus qu'à considérer le cas où A est donnée par

$$E = V \oplus L_1 \oplus L_2 \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} W \oplus f_2(L_1) \oplus f_1(L_2) = F,$$

avec
$$\dim V = n-m-2l, \quad \dim W = n-m-l, \qquad (*)$$
$$\dim L_1 = n_1 + l, \quad \dim L_2 = n_2 + l.$$

Remarquons que dans ce cas $\operatorname{Ker} f_1 = K_1 \subset V$ et $\operatorname{Ker} f_2 = K_2 \subset V$.

Nous allons étudier ce cas en trois parties correspondant aux différentes valeurs de l: $l = 0$, $l = 1$, $l \geqslant 2$. Pour cela, nous utiliserons le

LEMME. *Soit A une représentation comme ci-dessus. Si la sous-représentation $V \overset{\operatorname{res} f_1}{\underset{\operatorname{res} f_2}{\rightrightarrows}} W$ est décomposable, A est décomposable.*

Preuve. Supposons $V = S \oplus S' \overset{\operatorname{res} f_1}{\underset{\operatorname{res} f_2}{\rightrightarrows}} T \oplus T' = W$, une décomposition non triviale. $f_1(S) \subset T$, $f_1(S') \subset T'$. Soient T_1 un supplémentaire de $f_1(S)$ dans T et T'_1 un supplémentaire de $f_1(S')$ dans T'. On peut choisir une décomposition $L_1 = U_1 \oplus U'_1$ telle que $f_1(U_1) = T_1$ et $f_1(U'_1) = T'_1$.

De même on peut choisir $L_2 = U_2 \oplus U'_2$ telle que $f_2(U_2) \subset T$ et $f_2(U'_2) \subset T'$.

On obtient alors la décomposition suivante de A:

$$(S \oplus U_1 \oplus U_2) \oplus (S' \oplus U'_1 \oplus U'_2) \rightrightarrows (T \oplus f_2(U_1) \oplus f_1(U_2)) \\ \oplus (T' \oplus f_2(U'_1) \oplus f_1(U'_2))$$

3. La classification

3.1. Premier cas: $l = 0$

Soit A une représentation indécomposable du type (*) avec $l = 0$. En particulier:

$$\dim E = \dim F = n\,; \quad \dim V = \dim W = n-m\,; \quad \dim L_1 = n_1\,; \\ \dim L_2 = n_2\,.$$

Proposition. *L'une au moins des deux applications f_1 ou f_2 est un isomorphisme.*

Preuve. Par récurrence sur n.

Si $n = 1$, c'est trivial.

Si $n > 1$, on envisage deux cas:

1) $m = 0$, et alors f_1 et f_2 sont des isomorphismes.

2) $m > 0$, et on regarde $V \underset{\operatorname{res} f_2}{\overset{\operatorname{res} f_1}{\rightrightarrows}} W$ qui est indécomposable (par le lemme) et où $\dim V = \dim W < n$.

Par hypothèse de récurrence, res (f_1) — ou res (f_2) — est un isomorphisme. Alors $L_1 = 0$. Et puisque $f_1 : L_2 \to f_1(L_2)$ est un isomorphisme, $f_1 : E = V \oplus L_2 \to W \oplus f_1(L_2) = F$ est un isomorphisme. A isomorphisme près, on est alors ramené à classer les représentations $E \underset{f_2}{\overset{1}{\rightrightarrows}} E$ et $E \underset{1}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} E$.

Remarquons que si f_1 est inversible, $E \underset{1}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} E$ est isomorphe à $E \underset{f_1^{-1}}{\overset{1}{\rightrightarrows}} E$.

Pour les représentations du type $E \underset{f_2}{\overset{1}{\rightrightarrows}} E$, on regarde E comme $k[x]$-module