

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 33 (1987)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMULES POUR LES TRISÉCANTES DES SURFACES ALGÈBRIQUES
Autor: Barz, Patrick
Kapitel: II) Trisécantes dans P^4 : la théorie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-87886>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Tout k -uplet curviligne dans Σ_0 , de support un point de la courbe double Γ de S' , est limite (pour $k \geq 3$) de k -uplets double dans Σ_0 .

ii) Tout k -uplet curviligne dans Σ_0 est limite de k -uplets curvilignes dans des fibres Σ_λ de Σ/\mathbb{C} avec $\lambda \neq 0$.

iii) $\text{Hilb}^3 \Sigma_0$ est réduit au voisinage d'un triplet curviligne t de support un point-triple $\{M\}$, lorsque $t \not\subset S' = (\Sigma_0)_{\text{red}} = \Sigma_0 \cap H$.

$\text{Hilb}^2 \Sigma_0$ est réduit au voisinage d'un doublet d de support un point-pince $\{P\}$, lorsque $d \not\subset S'$.

$\text{Hilb}^2 \Sigma_0$ est réduit au voisinage d'un doublet d de support un point de Γ , lorsque $d \not\subset S'$.

Preuves des propositions 3 et 4. Il s'agit essentiellement, par des calculs en coordonnées, de se ramener à l'étude de modèles locaux pour Σ_0 , d'abord au voisinage de la courbe double Γ , puis d'un point triple M et enfin d'un point pince. Or cette étude pour les modèles locaux a été faite dans [24]. Voir l'Annexe 3 pour tous les détails de calcul.

II) TRISÉCANTES DANS \mathbf{P}^4 : LA THÉORIE

Soit S une surface de \mathbf{P}^4 à singularités ordinaires. Notons n son degré, d le degré de la courbe double apparente et t le nombre de points-triples apparents, dans une projection générique sur un \mathbf{P}^3 .

On regarde le diagramme, où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions sont entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccc}
 (9) & Al^3 \mathbf{P}^4 & \xrightarrow{i} & \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4 & (12) \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & \text{Hilb}_c^3 S & (6) .
 \end{array}$$

Le but de ce § II est de montrer la

PROPOSITION 5. Soit S une surface de \mathbf{P}^4 , d'invariants (n, d, t) . Pour tout cycle Z dans $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$, la formule trisécante donnant le degré du 0-cycle $Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S]$ est de la forme

$$T(S) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma)$$

où $a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta$ et γ sont des constantes ne dépendant que de Z .

1°) COMPOSANTES DE $\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0$

a) Notons S' la projection de S sur un \mathbf{P}^3 générique de \mathbf{P}^4 . S' admet une courbe double Γ avec t points-triples $M_1 \dots M_t$ et v points-pince. En I.3.b on a construit un schéma relatif Σ/C avec $\Sigma_1 = S$ et $(\Sigma_0)_{\text{red}} = S'$. De plus (proposition 3), on a

$$(*) \quad \Sigma_0 = S' \cup \Gamma^{(1)} \cup M_1^{(2)} \cup \dots \cup M_t^{(2)}$$

où $V^{(i)}$ désigne le i -ème voisinage infinitésimal de V dans \mathbf{P}^4 ; on a $\Sigma_0 \cap \mathbf{P}^3 = S'$.

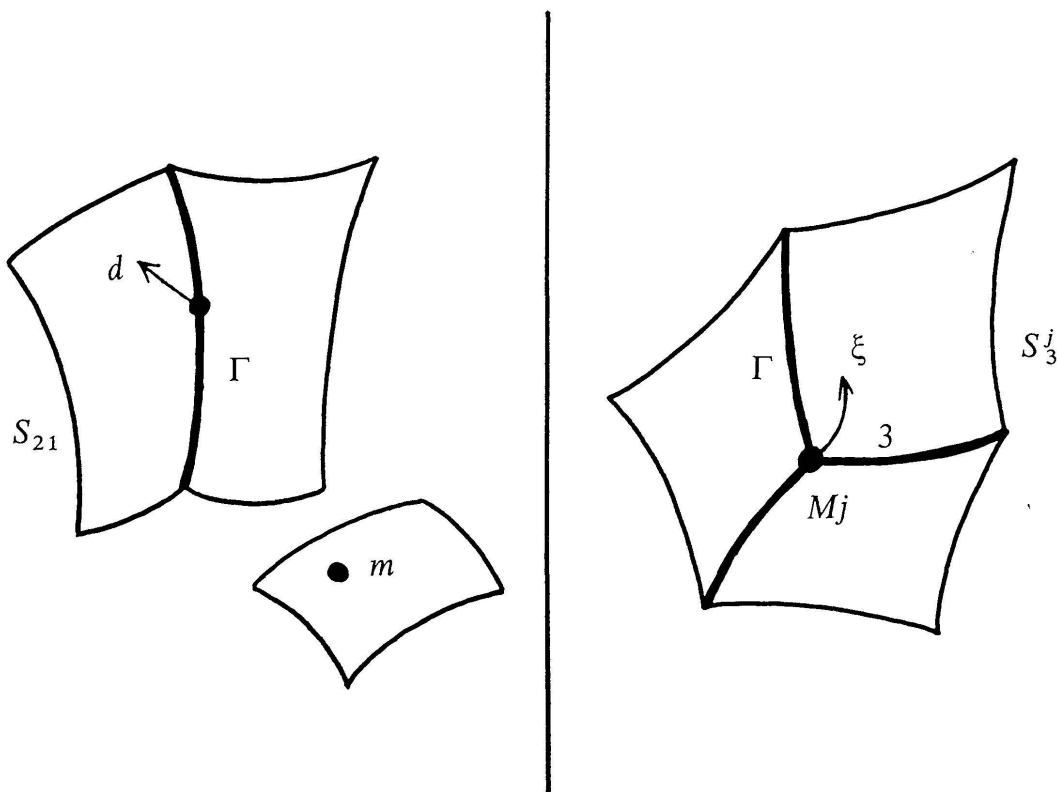
Nous allons détailler les différentes composantes du schéma $(\text{Hilb}^3 \Sigma_0)_{\text{red}}$.

Notation 1. Notons S_{21} la sous-variété (localement fermée) de $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ formée des triplets $t = d \cup m$ où

d est un doublet de \mathbf{P}^4 de support un point de Γ ,

m est un point de $S' - \Gamma$.

Soit $\overline{S_{21}}$ l'adhérence de S_{21} dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$.



Notons S_3^j pour $j = 1, 2 \dots t$ la sous-variété de $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ des triplets curvilignes ξ de \mathbf{P}^4 , de support $\{M_j\}$. Soit S_3 leur réunion (disjointe).

Remarque 5. Bien sûr, $\overline{S_{21}}$ et S_3 sont contenus dans $(\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0)_{\text{red}}$ d'après la structure nilpotente même de Σ_0 (*).

b) On a la

PROPOSITION 6.

- i) $(\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0)_{\text{red}}$ est réunion de $(\text{Hilb}_c^3 S')_{\text{red}}$, de S_{21} et des S_3^j ($j = 1, 2 \dots t$).
- ii) $\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0$ est génériquement réduit le long de ces composantes.

Preuve. i) Soit t un triplet curviligne contenu dans Σ_0 . Si t est contenu dans l'hyperplan \mathbf{P}^3 , comme $\Sigma_0 \cap \mathbf{P}^3 = S'$, on a $t \in (\text{Hilb}_c^3 S')_{\text{red}}$. Si $t \not\subset \mathbf{P}^3$, le support de t ne peut être formé de trois points simples, puisque $(\Sigma_0)_{\text{red}} = S'$ et $S' \subset \mathbf{P}^3$. Donc $\text{Supp } t$ rencontre Γ , car en dehors de Γ , les faisceaux structuraux de S' et Σ_0 sont égaux.

Premier cas. $\text{Supp } t = \{a, b\}$ avec $a \in \Gamma$ et t double en a . Si $b \notin \Gamma$, par définition, on a $t \in S_{21}$. Si $b \in \Gamma$, on le « bouge » en $b' \in S' - \Gamma$ et donc t appartient à $\overline{S_{21}}$.

Deuxième cas. $\text{Supp } t = \{a\}$ où $a \in \Gamma$. Si a est l'un des points-triples M_j , on a $t \in S_3$. Si a n'est pas l'un des points M_j , c'est soit un point-pince soit un point générique de Γ . Dans les deux cas, t est limite de triplets de support formé de deux points: en effet cela résulte de la proposition 4.

ii) La composante $\text{Hilb}_c^3 S'$ est génériquement réduite d'après les lemmes 10 et 11 de l'Annexe 2 puisque $S' \subset \mathbf{P}^3$ n'a que des singularités ordinaires. Par ailleurs S_3^j est génériquement réduite d'après la proposition 4 iii): un triplet générique de S_3^j n'est pas dans H . Enfin, montrons que S_{21} (donc $\overline{S_{21}}$) est génériquement réduit. Soit $d \cup m$ un triplet générique de S_{21} ; ainsi le support de d n'est pas un point triple et $d \not\subset H$. Alors $\text{Hilb}^2 \Sigma_0$ est réduit au voisinage de d par la proposition 4 iii); d'où S_{21} réduit au voisinage de $d \cup m$.

2°) CONTRIBUTION DE CES COMPOSANTES DANS $T(S)$

Soit $Z \in A^3(AI^3 \mathbf{P}^4)$ un cycle fixé. Nous allons montrer trois lemmes, avec les notations précédentes.

LEMME 3. *Le degré du 0-cycle $Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S']$ est de la forme*

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

où a_1, a_2 et a_3 ne dépendent que de Z .

LEMME 4. *Le degré du 0-cycle $Z \cdot i^* [S_3]$ est de la forme αt où α ne dépend que de Z . (S_3 désigne la réunion disjointe des S_3^j pour $j=1, 2 \dots t$.)*

LEMME 5. *Le degré du 0-cycle $Z \cdot i^* [\overline{S_{21}}]$ est de la forme $d(\beta n + \gamma)$ où β et γ ne dépendent que de Z .*

a) Prouvons le lemme 3. Regardons le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccccc}
 (9) & Al^3 \mathbf{P}^4 & \xrightarrow{i} & \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4 & (12) \\
 & j \uparrow & & \uparrow u & \\
 (7) & Al^3 \mathbf{P}^3 & \xrightarrow{\hat{i}} & \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3 & (9) \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & \text{Hilb}_c^3 S' & (6) .
 \end{array}$$

Nous voyons par examen des dimensions que $Al^3 \mathbf{P}^4$ et $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$ ne se coupent pas proprement dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$.

Nous aurons besoin du théorème de l'intersection résiduelle [7] [17] sous forme de la formule de Fulton-MacPherson [6], qu'on énoncera ainsi :

THÉORÈME (Fulton-MacPherson). *Soit Y une sous-variété non-singulière de la variété non-singulière X . Soit A une sous-variété de X et $I = A \cap Y$. Considérons le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques :*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & X \\
 j \uparrow & & \uparrow u \\
 I & \xrightarrow{\hat{i}} & Y .
 \end{array}$$

Si I est localement intersection complète dans A et si

$$\dim I = \dim A + \dim Y - \dim X + r,$$

alors pour tout cycle α dans Y , le cycle $i^*u_*\alpha$ dans A est égal à $j_*(C_r \cdot \hat{i}^*\alpha)$ où C_r est fixé dans $A^r(I)$.

L'Annexe 7 montre que $Al^3 \mathbf{P}^4$ et $Hilb_c^3 \mathbf{P}^3$ se coupent schématiquement en $Al^3 \mathbf{P}^3$. Appliquons alors la formule de Fulton-MacPherson à $\alpha = [Hilb_c^3 S']$ dans $A^1(Hilb_c^3 \mathbf{P}^3)$. Comme ici $r = 1$, on obtient

$$i^*u_*\alpha = i^* [Hilb_c^3 S'] = j_*C$$

où $C = C_1 \cdot \hat{i}^* [Hilb_c^3 S']$ avec C_1 fixé dans $A^1(Al^3 \mathbf{P}^3)$. Par suite, par la formule des projections, on a dans $A^1(Al^3 \mathbf{P}^4)$:

$$Z \cdot i^* [Hilb_c^3 S'] = Z \cdot j_*C = j_*(j^*Z \cdot C_1 \cdot \hat{i}^* [Hilb_c^3 S']).$$

Mais $K = j^*Z \cdot C_1$ appartient à $A^4(Al^3 \mathbf{P}^3)$ et donc par la proposition 2 :

$$\deg Z \cdot i^* [Hilb_c^3 S'] = \deg K \cdot \hat{i}^* [Hilb_c^3 S']$$

est de la forme

$$a_1n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

où a_1 , a_2 et a_3 sont des constantes. Le lemme 3 est donc prouvé.

b) Prouvons le lemme 4. Pour cela nous avons besoin d'un lemme auxiliaire :

LEMME 6. Désignons par I^j l'intersection ensembliste de S_3^j (défini dans ce paragraphe en 1.a) et de $Al^3 \mathbf{P}^4$ dans $Hilb_c^3 \mathbf{P}^4$.

Alors génériquement, S_3^j et $Al^3 \mathbf{P}^4$ se coupent transversalement ; par suite $i^* [S_3^j] = [I^j]$.

Remarquer que I^j est isomorphe à \mathbf{P}^3 par le choix de l'axe du triplet passant par M_j .

Preuve du lemme 6. C'est un simple calcul en coordonnées, comme on en fera beaucoup dans l'Annexe: soit ξ_0 un triplet aligné de support $\{M_j\}$, d'axe transverse à \mathbf{P}^3 (l'hyperplan qui contient S'). Dans un système inhomogène de coordonnées (x, y, z, u) centré en M_j , S' a pour équations

$$xyz + \dots = 0, \quad u = 0$$

et l'axe ξ_0 est engendré par un vecteur de coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Puisque ξ_0 est supposé générique dans I^j , on se ramène à $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ et l'idéal de ξ_0 est alors

$$I_0 = (x^3, y-x, z-x, u-x).$$

Une carte de $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ en ξ_0 est donnée par

$$(a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3)$$

correspondant à l'idéal voisin :

$$I = (x^3 + ax^2 + bx + c, y-x + a_1x^2 + b_1x + c_1, z-x + a_2x^2 + b_2x + c_2, \\ u-x + a_3x^2 + b_3x + c_3).$$

Dans cette carte, $Al^3 \mathbf{P}^4$ s'exprime par $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et S_3^j par

- d'une part $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ car la courbe sur laquelle est le triplet curviligne doit passer par 0,
- d'autre part $a = b = c = 0$ car le support doit être $\{0\}$. Cela termine la démonstration du lemme 6.

Nous aurons besoin de rappeler la proposition suivante (montrée en [25]). C'est une conséquence facile du théorème de Leray-Hirsch, car

$$\text{Axe} : Al^k \mathbf{P}^N \rightarrow G(1, N)$$

est une fibration de fibre type \mathbf{P}^k .

PROPOSITION 7. *Soit i un entier et $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \dots \mathcal{H}_i$ des hyperplans de \mathbf{P}^N en position générale. Pour $k \geq i$, soit H_i la sous-variété de $Al^k \mathbf{P}^N$ formée des k -uplets alignés ξ avec $\xi \cap \mathcal{H}_p \neq \emptyset$ pour $1 \leq p \leq i$. Alors on a l'égalité dans $A_{\mathbf{Q}}^i(Al^k \mathbf{P}^N)$ des sous-espaces vectoriels*

$$A_{\mathbf{Q}}^i(Al^k \mathbf{P}^N) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{j=0}^i \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^{i-j}(G) \cdot [H_j].$$

(On note $A_{\mathbf{Q}}^i = A^i \otimes_{\mathbf{Z}}$ et $G = G(1, N)$).

Dans le cas qui nous occupe ($k=3$), on a donc en fixant $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ trois hyperplans de \mathbf{P}^4 en position générale, l'égalité :

$$A_{\mathbf{Q}}^3(Al^3 \mathbf{P}^4) \\ = \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^3(G) \oplus \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^2(G) \cdot [H_1] \oplus \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^1(G) \cdot [H_2] \oplus \mathbf{Q} [H_3].$$

Or il est bien connu par la décomposition de Schubert (voir par exemple [21]) que $A^i(G(1, 4))$ est donné par :

- $A^3(G) = \mathbf{Z}(0, 4) \oplus \mathbf{Z}(1, 3)$ où

$$\begin{cases} (0, 4) = \text{droites passant par un point fixe } 0 \text{ de } \mathbf{P}^4, \\ (1, 3) = \text{droites contenues dans un hyperplan } H' \text{ de } \mathbf{P}^4 \text{ et coupant} \\ \text{une droite } \Delta' \text{ de } H'. \end{cases}$$

$$- A^2(G) = \mathbf{Z}(1, 4) \oplus \mathbf{Z}(2, 3) \text{ où}$$

$$\begin{cases} (1, 4) = \text{droites coupant une droite } \Delta'' \text{ de } \mathbf{P}^4, \\ (2, 3) = \text{droites contenues dans un hyperplan } H'' \text{ de } \mathbf{P}^4. \end{cases}$$

$$- A^1(G) = \mathbf{Z}(2, 4) \text{ où}$$

$$(2, 4) = \text{droites coupant un plan fixe } \pi \text{ de } \mathbf{P}^4.$$

Pour montrer l'assertion du lemme 4, il suffit de la montrer pour Z décrivant une base de $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$. Mais on a (lemme 6) $Z \cdot i^* [S_3^j] = Z \cdot [I^j]$. Or dans la base énumérée ci-dessus de $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$, seul le premier cycle $Axe^*(0, 4)$ a une intersection non vide avec I^j . En effet,

$$\begin{cases} Axe^*(1, 3) \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin H' \\ Axe^*(1, 4) \cdot [H_1] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1 \\ Axe^*(2, 3) \cdot [H_1] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1 \\ Axe^*(2, 4) \cdot [H_2] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1 \\ [H_3] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1. \end{cases}$$

Notons alors α le degré d'intersection $Axe^*(0, 4) \cdot [I^j]$. (On peut se convaincre que c'est 1 par un calcul en coordonnées, mais c'est inutile pour la suite). Cela correspond à l'unique triplet aligné ξ_0 dans \mathbf{P}^4 de support $\{M_j\}$ et d'axe $\overline{OM_j}$. On a donc $\deg Axe^*(0, 4) \cdot i^* [S_3^j] = \alpha$ d'où $\deg Axe^*(0, 4) \cdot i^* [S_3] = \alpha t$ puisque $[S_3] = \sum_{j=1}^t [S_3^j]$.

L'assertion du lemme 4 est prouvée pour Z décrivant une base de $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$, donc le lemme 4 est démontré.

c) Prouvons le lemme 5. Nous aurons besoin comme en b), d'un lemme auxiliaire:

LEMME 7. Désignons par I l'intersection ensembliste de $\overline{S_{21}}$ (défini dans ce paragraphe en 1.a)) et de $Al^3 \mathbf{P}^4$ dans $Hilb_c^3 \mathbf{P}^4$. Alors génériquement, $\overline{S_{21}}$ et $Al^3 \mathbf{P}^4$ se coupent transversalement; par suite $i^* [S_{21}] = [I]$ dans $A^*(Al^3 \mathbf{P}^4)$.

La preuve du lemme 7 est un calcul en coordonnées comme le lemme 6: voir l'Annexe 4.

D'après ce lemme, pour prouver le lemme 5, il suffit de montrer que pour tout cycle Z dans $A^3((Al^3 \mathbf{P}^4))$, le degré du 0-cycle $Z \cdot [I]$ est de la forme $d(\beta n + \gamma)$ où β et γ ne dépendent que de Z . Il suffit donc de le vérifier pour Z décrivant une base de $A_{\mathbb{Q}}^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$. Or une telle base a été explicitée en b), comme conséquence de la proposition 7. On utilise donc les mêmes notations qu'en b).

Il s'agit de voir que les degrés des 0-cycles

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \text{Axe}^*(0, 4) \cdot [I] \\ \text{ii) } \text{Axe}^*(1, 3) \cdot [I] \\ \text{iii) } \text{Axe}^*(1, 4) \cdot [H_1] \cdot [I] \\ \text{iv) } \text{Axe}^*(2, 3) \cdot [H_1] \cdot [I] \\ \text{v) } \text{Axe}^*(2, 4) \cdot [H_2] \cdot [I] \\ \text{vi) } [H_3] \cdot [I] \end{array} \right.$$

vérifient l'assertion du lemme 5.

Montrons-le rapidement cas par cas, toujours avec les notations de b). L'hyperplan de \mathbf{P}^4 contenant la projection S' est noté \mathbf{P}^3 .

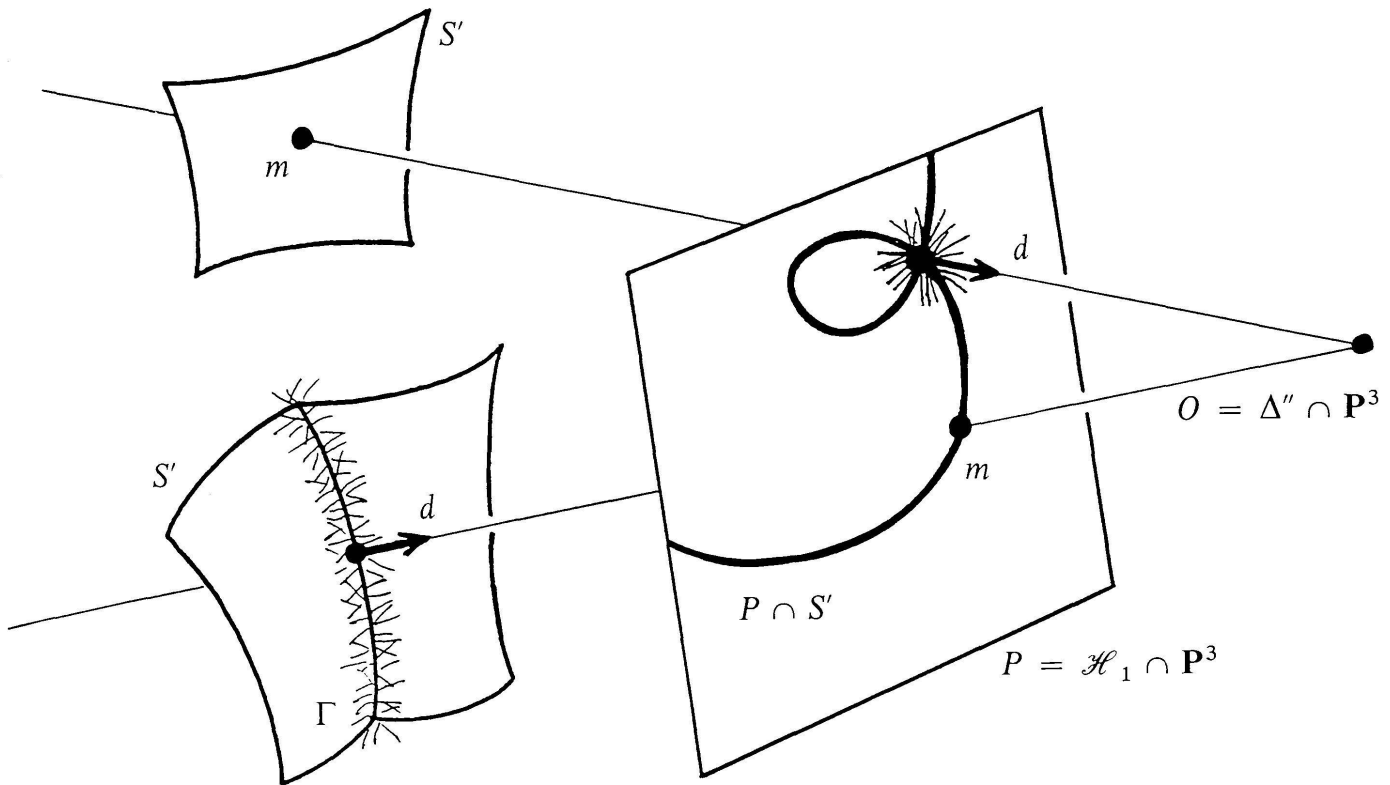
- i) Les axes des triplets éléments de I sont dans \mathbf{P}^3 , donc ne peuvent rencontrer un point fixe O de \mathbf{P}^4 . Le premier des degrés cherchés est donc O .
- ii) Les axes des triplets de I sont dans le plan $H' \cap \mathbf{P}^3$ de \mathbf{P}^3 et passent par le point fixe $\Delta' \cap \mathbf{P}^3$ de ce plan. Donc il y a d possibilités pour le choix d'un point-double et il reste $n - 2$ autres possibilités pour le point simple. Dans ce cas le degré cherché est $d(n - 2)$.

On ne tient pas compte d'une multiplicité éventuelle, car cela ne change rien à l'énoncé du lemme.

- iii) Soit $O = \Delta'' \cap \mathbf{P}^3$ et $P = \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{P}^3$ (où \mathcal{H}_1 est l'hyperplan qui définit le cycle H_1). Les axes des triplets de I doivent passer par O et les triplets avoir un point au moins sur P . Deux cas à distinguer :

- ou le point simple est sur $P \cap S'$ et le point-double a son support sur Γ . Il y a donc nd choix possibles puisque $\deg \Gamma = d$;
- ou le point-double a pour support l'un des d points de $P \cap \Gamma$ et il reste $n - 2$ autres possibilités pour le point simple. (En plus, dans ce cas la multiplicité est 2).

La somme est bien de toute façon de la forme $d(\beta n + \gamma)$.



Dans l'un comme l'autre cas de figure ci-dessus, les petits traits représentent les doublets dans \mathbf{P}^4 , de support Γ .

iv) Soit $P = H'' \cap \mathbf{P}^3$ et $P_1 = \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{P}^3$. Les triplets doivent donc être dans P et avoir au moins un point sur la droite $\Delta = P \cap P_1$. Il y a donc n possibilités pour le point simple, d'où dn possibilités pour le choix d'un tel triplet.

v) Les axes des triplets de I doivent couper la droite fixe $\Delta = \pi \cap \mathbf{P}^3$ et les triplets doivent avoir deux points sur \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 . Soit $P_i = \mathcal{H}_i \cap \mathbf{P}^3$. Comme les triplets de I ne sont pas formés de trois points distincts, le support $\{O\}$ du point-double doit être ou sur P_1 ou sur P_2 . Supposons qu'il soit sur P_1 ; comme le degré de Γ est d , cela donne d possibilités de choix pour O . Mais alors la droite Δ et le point O engendrent un plan P . La droite $P \cap P_2$ coupe S' en n points dans P parmi lesquels est choisi le troisième point du triplet; donc il y a dn solutions et par symétrie entre P_1 et P_2 , $2dn$ au total.

vi) Soit $P_i = \mathcal{H}_i \cap \mathbf{P}^3$. Les triplets de I doivent avoir un point sur chacun des trois plans P_1, P_2, P_3 ; mais comme ces triplets ne sont pas simples, la partie doublet est obligatoirement à support sur une des droites $P_i \cap P_j$. Or aucune de ces droites ne coupe Γ ; l'intersection est donc O .

Le lemme 5 est ainsi démontré.

d) *Conclusion*

Soit S une surface de \mathbf{P}^4 à singularités ordinaires et Σ/\mathbf{C} le schéma relatif associé défini en I.3.b. Posons $\bar{U} = \mathbf{C}$ et $U = \mathbf{C}^*$. Nous allons voir que les hypothèses de la proposition 1 sont satisfaites pour le schéma relatif Σ/\mathbf{C} .

Pour a), cela résulte de la proposition 4 ii). Pour b), cela résulte de la proposition 6 ii), chaque composante de $\text{Hilb}^3 \Sigma_0$ étant génériquement réduite. Enfin le schéma Σ/\mathbf{C}^* est isomorphe au produit $S \times \mathbf{C}^*$ par construction même (remarque 3). Donc par la remarque 1, Σ/\mathbf{C}^* est k -plat, puisque $S \subset \mathbf{P}^4$ n'a que des singularités ordinaires. L'hypothèse c) de la proposition 1 est donc satisfaite.

La proposition 1 donne alors l'équivalence rationnelle dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$:

$$[\text{Hilb}_c^3 S] \sim [\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0].$$

Or par la proposition 6 i), on a l'égalité des cycles:

$$[\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0] = [\text{Hilb}_c^3 S'] + [\overline{S_{21}}] + [S_3].$$

D'où pour n'importe quel cycle Z de $A^3(\text{Al}^3 \mathbf{P}^4)$, l'égalité des 0-cycles:

$$Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S] = Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S'] + Z \cdot i^* [\overline{S_{21}}] + Z \cdot i^* [S_3].$$

Des lemmes 3, 4 et 5 résulte alors aussitôt la proposition 5 que l'on cherchait à prouver.

III) TRISÉCANTES DANS \mathbf{P}^4 : LES CALCULS

Soit S une surface de \mathbf{P}^4 d'invariants n, d, t (notations du § II). On va donner deux formules trisécantes pour S , supposée à singularités ordinaires dans \mathbf{P}^4 .

1°) TANGENTES À S RECOUPANT S ET UNE DROITE FIXÉE.

Nous cherchons le degré du 0-cycle

$$[\mathcal{D}] \cdot \text{Axe}^* \sigma_2 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S]$$

où comme d'habitude, $i: \text{Al}^3 \mathbf{P}^4 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ est l'injection canonique. Ici, $\mathcal{D} \subset \text{Al}^3 \mathbf{P}^4$ est l'hypersurface des triplets alignés non simples et $\sigma_2 = (1, 4)$ est le cycle de $A^2(G(1, 4))$ des droites de \mathbf{P}^4 coupant une droite fixe Δ . D'après la proposition 5, ce nombre est de la forme