

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1987)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES Propriétés algébriques et arithmétiques  
**Autor:** Cerlienco, L. / Mignotte, M. / Piras, F.  
**Kapitel:** I. SÉRIES RATIONNELLES SUR UN CORPS K  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-87887>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$F_q$  — la méthode banale consistant à calculer les valeurs de  $P(x)$  pour  $x$  parcourant  $F_q$  nécessite en moyenne près de  $q$  évaluations, en calculant l'ordre de la matrice compagnon de  $P$  on peut répondre à la question en  $O(\text{Log } q)$  opérations.

Quelques ouvrages contiennent une présentation générale des suites récurrentes linéaires, d'abord le livre de E. Lucas [33], ainsi que Bachman [3], Henrici [30] chap. 7 et [29], Montel [47], Pisot [52]. Signalons aussi le livre de Dickson [22] sur l'histoire de la théorie des nombres, le chapitre XVII est consacré aux suites récurrentes linéaires.

## A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

### I. SÉRIES RATIONNELLES SUR UN CORPS $\mathcal{K}$

Soit une série formelle

$$\Xi(X) = \sum_{n \geq 0} \xi_n X^n$$

à coefficients dans un corps (commutatif)  $\mathcal{K}$ ; nous allons étudier différents critères de rationalité d'une telle série.

1. Supposons  $\Xi$  rationnelle, c'est-à-dire qu'il existe deux polynômes  $A$  et  $B$ , à coefficients dans  $\mathcal{K}$ , tels que

$$(1) \quad \Xi(X) = \frac{A(X)}{B(X)}, \quad B(0) \neq 0.$$

Soient alors  $\omega'_1, \dots, \omega'_k$  les racines du polynôme  $B$  dans une extension algébrique convenable  $\mathcal{L}$  du corps  $\mathcal{K}$  et soit  $\tau_i$  la multiplicité de  $\omega'_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ).

La décomposition en éléments simples de la fraction  $A/B$  est de la forme

$$(2) \quad \frac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\tau_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X - \omega'_i)^j},$$

où  $Q(X)$  est un polynôme à coefficients dans  $\mathcal{K}$  (c'est le quotient de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ ) et où les  $\alpha_{ij}$  appartiennent au corps  $\mathcal{L}$ .

L'identité formelle, vraie pour tout entier positif  $j$ ,

$$(X - \omega)^{-j} = (-1)^j \omega^{-j} \sum_{n \geq 0} \binom{n+j-1}{j-1} (X \omega^{-1})^n \quad (\text{où } \binom{n}{0} = 1)$$

jointe à (1) et (2) conduit à la relation

$$\Xi(X) = Q(X) + \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\tau_i} (-1)^j \alpha_{ij} \omega_i^{n+j} \binom{n+j-1}{j-1} X^n$$

où on a posé  $\omega_i = \frac{1}{\omega'_i}$  ( $i=1, \dots, k$ ).

Si  $Q$  a pour degré  $n_0$ , on a donc

$$(3) \quad \xi_n = P_1(n) \omega_1^n + \dots + P_k(n) \omega_k^n \quad \text{pour } n > n_0,$$

avec

$$(4) \quad P_i(n) = \sum_{j=1}^{\tau_i} (-1)^j \alpha_{ij} \omega_i^j \binom{n+j-1}{j-1}.$$

*Remarque.* Lorsque la caractéristique du corps  $\mathcal{K}$  est nulle, chaque  $P_i$  est un polynôme (à coefficients dans le corps  $\mathcal{L}$ ) en  $n$  de degré plus petit que  $\tau_i$ , et même égal à  $\tau_i - 1$  lorsque la représentation (1) est irréductible. On dit alors que l'expression (3) est un *polynôme-exponentiel*. A ce sujet voir aussi l'exemple 2) plus loin.

2. Réciproquement, supposons maintenant que les relations (3) et (4) aient lieu pour  $n > n_0$ .

Soit  $E$  l'opérateur de décalage (en anglais « shift operator »), qui à une suite  $\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}$  associe la suite  $E\xi = (\xi_{n+1})_{n \geq 0}$ . Nous allons montrer que la suite

$$(E - \omega_1 I)^{\tau_1} \dots (E - \omega_k I)^{\tau_k} (\xi_n)$$

est ultimement nulle, et plus précisément que  $\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}$  satisfait à l'équation aux différences finies à coefficients constants

$$(5) \quad E^{n_0} \cdot G(E) (\xi_n) = 0$$

où

$$(5') \quad G(X) = \frac{X^{n_0}}{B(0)} B(X^{-1}) = \prod_{i=1}^k (X - \omega_i)^{\tau_i}.$$

Du fait que les opérateurs  $E - \omega_i I$  commutent entre eux, il suffit, par linéarité, de vérifier que les suites

$$(E - \omega I)^{j'} \left( \binom{n+j''-1}{j-1} \omega^n \right)$$

sont nulles pour tout triplet d'entiers naturels  $j, j', j''$  vérifiant  $j' \geq j \geq 1$

et  $j'' \geq j$ . Raisonnons par récurrence sur  $j'$ . Ce résultat est clair pour  $j' = 1$ . Supposons  $j' > 1$  et l'assertion vraie jusqu'à l'ordre  $j' - 1$ . La relation

$$\begin{aligned} (E - \omega I) \left( \binom{n+j''-1}{j-1} \omega^n \right) &= \left( \binom{n+j''}{j-1} - \binom{n+j''-1}{j-1} \right) \omega^{n+1} \\ &= \binom{n+j''-1}{j-2} \omega^{n+1} = \omega \binom{n+j''-1}{j-2} \omega^n \end{aligned}$$

permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui prouve le résultat annoncé.

Si on pose en (5)

$$(6) \quad G(X) = X^m - a_{m-1}X^{m-1} - \dots - a_0, \quad m = \sum_{i=1}^k \tau_i,$$

on a donc démontré que la suite  $(\xi_n)$  vérifie la condition

$$(7) \quad \xi_{n+m} = a_{m-1} \xi_{n+m-1} + \dots + a_0 \xi_n \quad \text{pour } n > n_0,$$

c'est donc — par définition — une *suite récurrente linéaire* (en abrégé : s.r.l.); le polynôme  $X^{n_0}G(X)$  sera appelé *échelle de récurrence*<sup>1)</sup> ou *polynôme caractéristique* et l'entier  $(n_0 + m)$  *ordre* de la s.r.l.  $(\xi_n)$  (il s'agit d'un abus de langage car ces objets ne sont pas uniques; voir plus avant).

Supposons enfin que la relation (7) ait lieu. On vérifie alors aisément que l'expression

$$\left( \sum_{n \geq 0} \xi_n X^n \right) (a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \dots + a_{m-1} X - 1)$$

est un polynôme en  $X$  de degré au plus  $n_0 + m$ . La série  $\Xi(X) = \sum_{n \geq 0} \xi_n X^n$  est alors une fraction rationnelle de la forme (1), ce qui achève la preuve de l'équivalence logique des trois objets considérés.

## II. QUELQUES EXEMPLES

Ce paragraphe contient un certain nombre d'exemples variés qui illustrent les résultats généraux que nous venons de présenter. De plus de nombreux exemples figurent dans tout bon livre sur le calcul aux différences finies ou sur la combinatoire (entre autres [21], [26], [29], [30], [46]).

1) L'exemple le plus populaire de s.r.l. et aussi le plus ancien (il date de 1202) est la suite  $(F_n)$  de Fibonacci définie par les conditions

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pour } n \geq 0$$

<sup>1)</sup> C'est la terminologie de E. Lucas [33].