

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1990)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTERIOR ALGEBRAS AND THE QUADRATIC RECIPROCITY LAW
Autor: Rousseau, G.

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-57910>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PROPOSITION 1. *If E is a linearly ordered set with m elements, where m is an arbitrary positive integer, then the permutation of E which transforms the elements to reverse order has signature $(-1)^{\binom{m}{2}}$.*

PROPOSITION 2. *If E and F are disjoint linearly ordered sets with m and n elements respectively, where m and n are arbitrary positive integers, then the permutation of $E \cup F$ which transforms the elements from the order in which all elements of E precede all elements of F to the order in which all elements of F precede all elements of E has signature $(-1)^{mn}$.*

PROPOSITION 3. *If E and F are linearly ordered sets with m and n elements respectively, where m and n are arbitrary positive integers, then the permutation of $E \times F$ which transforms the elements from lexicographic (row) order to dual-lexicographic (column) order has signature $(-1)^{\binom{m}{2}\binom{n}{2}}$.*

The simplest method of proof in each case is to count the number of inversions. From the foregoing we see that Proposition 1 is substantially the first supplementary law, Proposition 2 plays a certain auxiliary role in regard to the definition of the Jacobi symbol, and Proposition 3 may be viewed as comprising the combinatorial kernel of the reciprocity law.

REFERENCES

- [1] BACHMANN, P. *Niedere Zahlentheorie I*. Teubner, Leipzig, 1902, reprinted Chelsea, New York, 1968.
- [2] CARTIER, P. Sur une généralisation des symboles de Legendre-Jacobi. *L'Ens. Math.* 16 (1970), 31-48.
- [3] FROBENIUS, F.G. Über das quadratische Reziprozitätsgesetz I. *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin* (1914), 335-349.
- [4] LEHMER, D.H. The characters of linear permutations. *Lin. and Multilin. Alg.* 4 (1976), 1-16.
- [5] LERCH, M. Sur un théorème arithmétique de Zolotarev. *Česka Akad., Prague, Bull. Int. Cl. Math.* 3 (1986), 34-37.

- [6] MAC LANE, S. and G. BIRKHOFF. *Algebra*, Macmillan, 1967.
- [7] ROUSSEAU, G. On the Jacobi symbol. (In preparation.)
- [8] SCHUR, I. Über die Gaußschen Summen. *Nachrichten K. Gesell. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl.* (1921), 147-153.
- [9] ZOLOTAREV, G. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre. *Nouv. Ann. de Math. (2) 11* (1872), 354-362.

(Reçu le 8 décembre 1989)

G. Rousseau

The University
Leicester, LE1 7RH
(England)