Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ON THE AVERAGE BEHAVIOUR OF THE LARGEST DIVISOR OF n PRIME TO A FIXED INTEGER k

Autor: PÉTERMANN, Y.-F. S.

Kurzfassung

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58739

L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 213-222

ON THE AVERAGE BEHAVIOUR OF THE LARGEST DIVISOR OF n PRIME TO A FIXED INTEGER k

by Y.-F. S. PÉTERMANN

RÉSUMÉ. On étudie le comportement de la fonction bornée $h_k(x) := x^{-1}E_k(x)$, où $E_k(x) := \sum_{n \leqslant x} \delta_k(n) - (k/2\sigma(k))x^2$ est le terme irrégulier du comportement asymptotique moyen de $\delta_k(n)$, le plus grand diviseur de n premier à k (et où l'on peut sans perte supposer que k est sans facteur carré). On s'intéresse plus particulièrement aux nombres I_k et S_k, les lim inf et lim sup de $h_k(x)$ (lorsque $x \to \infty$), dont les valeurs exactes ne sont connues que si $k = 1$ ou si k est un nombre premier (Joshi et Vaidya [JV]). En établissant l'existence et la symétrie de la fonction de répartition de $h_k(n)$ (au sens de Wintner), on simplifie le problème en démontrant que $I_k = -S_k$. Puis, pour tous les k non premiers et sans facteur carré, on améliore explicitement l'estimation $S_k \geqslant k/\sigma(k)$ (de Herzog et Maxsein [HM], et indépendamment Adhikari, Balasubramanian et Sankaranarayanan [ABS]).

0. INTRODUCTION AND STATEMENT OF THE RESULTS

For a fixed natural number k we denote by $\delta_k(n)$ the largest divisor of n which is prime to k. If κ is the squarefree core of k we have $\delta_k(n) = \delta_\kappa(n)$, and we shall assume from now on that k is squarefree. We define the associated error term

$$E_k(x) := \sum_{n \leqslant x} \delta_k(n) - \frac{k}{2\sigma(k)} x^2 , \tag{0.1}$$

where σ is the sum-of-divisors function. The behaviour of $E_k(x)$ has been investigated in [Su], [JV], [HM], [ABS], [AB], and very recently in [A]. It is known that [JV]

$$E_k(x) = O(x) \tag{0.2}$$