

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME FACILE DE WARING  
**Autor:** Revoy, Philippe  
**Kapitel:** 3. Identités et problèmes de Tarry-Escott  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58740>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

sont pairs: les nombres représentés sont donc de la forme  $16m + 8$ . Pour pouvoir éventuellement montrer que  $\nu(4) = 9$ , ou au moins que les nombres  $16m \pm 7$  sont somme d'au plus neuf bicarrés, il faut obtenir des identités où le nombre de polynômes précédés du signe  $+$  et celui des polynômes précédés du signe  $-$  sont très différents et il faut que beaucoup des premiers prennent des valeurs impaires, tous les autres prenant des valeurs paires. Ainsi on peut espérer pour  $B$  un résidu modulo 16 le plus élevé possible par rapport au nombre total  $h$  de polynômes. Ainsi on pourrait envisager de chercher une identité de la forme

$$(9) \quad (P + \alpha)^4 - P^4 + \sum_{i=1}^s Q_i^4 = Ax + B,$$

avec  $\alpha$  impair,  $P$  prenant des valeurs paires et les  $Q_i$  des valeurs impaires. Alors on aurait  $B \equiv s + 1 \pmod{16}$  ce qui fournirait des identités utilisables pour les nombres de la forme  $16m \pm 7$  et  $\pm 8$ . Cependant, comme  $d^\circ((P + \alpha)^4 - P^4) \equiv 0(3)$ , il faut que le degré de  $P$  soit un multiple de 4 et que l'un des  $Q_i$  au moins soit de degré multiple de 3.

On peut obtenir d'autres identités avec des bicarrés; par exemple

$$(10) \quad \sum_{i=1}^4 (a_i x + 1)^4 - (a_i x - 1)^4 = 8 \left( \sum_i a_i \right) x$$

si  $\sum_{i=1}^4 a_i^3 = 0$ , d'où des identités pour  $48x$  avec les suites  $(3, 4, 5, -6)$ ,  $(10, 9, -12, -1)$ ,  $(27, 16, -19, -18)$ ... (noter que  $\sum a_i \equiv \sum a_i^3 \pmod{6}$  est toujours divisible par 6).

D'autres identités à 4, 5 ou 6 termes peuvent s'obtenir facilement à l'aide de solutions triviales ou non triviales des équations  $\sum_{i=1}^s X_i^4 = \sum_{j=1}^t Y_j^4$  où les couples  $(s, t)$  sont  $(2, 2)$ ,  $(3, 2)$  ou  $(3, 3)$ .

### 3. IDENTITÉS ET PROBLÈMES DE TARRY-ESCOTT

L'identité (3), de degré 5, est le cas particulier d'identités beaucoup plus générales. Ainsi

$$(11) \quad \sum_{i=1}^s (x + a_i)^k - \sum_{j=1}^s (x + b_j)^k = Ax + B \quad \text{avec } A \neq 0$$

si  $\sum_i a_i^h = \sum_j b_j^h$  pour  $1 \leq h \leq k-2$  et  $\sum_i a_i^{k-1} \neq \sum_j b_j^{k-1}$ .

On appelle  $M(k)$  le plus petit entier  $h$  tel qu'il existe une identité (11): on a  $v_*(k) \leq 2M(k)$ .

La recherche de systèmes  $(a_1, \dots, a_s; b_1, \dots, b_s)$  telles que  $(S_t): \sum_i a_i^h = \sum_j a_j^h$

pour  $h = 1, 2, \dots, t$  constitue le problème de Tarry-Escott ([2], [9]). Remarquons que  $(S_t)$  équivaut à l'égalité des  $t$  premières fonctions symétriques élémentaires des  $s$ -uples  $(a_i)$  et  $(b_j)$ : si  $t \geq s$  alors les  $a_i$  et les  $b_j$  sont égaux, à une permutation près. Ainsi dans (11), la condition  $\sum a_i^{k-1} \neq \sum b_j^{k-1}$  ne peut être satisfaite que si  $s > k-2$ . Désignons par  $p(k)$  le plus petit des entiers  $s > k$  tel qu'il existe deux  $s$ -uples différents ayant les mêmes fonctions symétriques élémentaires de degré  $1, 2, \dots, k$ . La conjecture dans ce problème est que  $p(k) = k+1$ , résultat qui n'est connu que par des exemples numériques pour  $k \leq 10$ . Il est conjecturé que  $p(k-2) = M(k)$ : on a clairement l'inégalité  $p(k-2) \leq M(k)$ , mais on sait seulement montrer l'alternative:  $p(k-2) = p(k-1)$  ou bien  $p(k-2) = M(k)$ .

En particulier  $p(k-2) = M(k)$  si et seulement si la suite  $p(k)$  est strictement croissante, ce qui n'est pas démontré. Tous les exemples numériques de  $s$ -uples donnant des majorations de  $p(k)$ , par exemple pour  $k \leq 30$  fournissent en fait des majorations de  $M(k)$  et permettent de l'utiliser pour majorer  $v_*(k)$ . De cela, découle par exemple les majorations  $v_*(6) \leq 10$ ,  $v_*(7) \leq 12$  et  $v_*(8) \leq 14$ . Avec  $\Delta(8) \leq 16$ , ceci donne  $v(8) \leq 30$ . Dans une courte note ([8], L. Vaserstein montre en fait que  $v_*(8) \leq 12$  et rappelle une identité donnant  $v_*(6) \leq 8$ . Nous allons maintenant en donner l'idée, obtenant ainsi une identité plus simple que celle de [8].

Soient  $4n$  entiers positifs

$$a_i, b_i, a'_j, b'_j, 1 \leq i, j \leq n$$

et

$$S(x) = \sum_i (a_i x + b_i)^{2k} - (a_i x - b_i)^{2k} + \sum_j (a'_j x - b'_j)^{2k} - (a'_j x + b'_j)^{2k} :$$

c'est un polynôme impair en  $x$  dont les coefficients sont des multiples entiers des sommes

$$S_h = \sum_i a_i^{2k-(2h+1)} b_i^{2h+1} - \sum_i a_i'^{2k-(2h+1)} b_i'^{2h+1}, h = 0, 1, \dots, k-1.$$

Le polynôme  $S$  sera du premier degré, et non nul, si  $S_0 = S_1 = \dots = S_{k-2} = 0$  et  $S_{k-1} \neq 0$ . Pour annuler  $S_0, \dots, S_{k-2}$ , il suffit d'imposer les relations: pour  $i = 1, \dots, n$

$$a_i^{2k-1} b_i = a_i'^{2k-1} b_i' \dots$$

$$a_i^{2k-(2h+1)} b_i^{2h+1} = a_{s_h(i)}'^{2k-(2h+1)} b_{s_h(i)}'^{2h+1}, \quad h = 1, \dots, k-2$$

où  $s_h$  est une permutation de  $\{1, 2, \dots, n\}$  sans points fixes telles que  $s_{h_1}(i) \neq s_{h_2}(i)$  pour tout  $i$  et  $h_1 \neq h_2$  (sinon on aurait  $a_i^{\alpha_k} b_i^{\beta_k} = a_j^{\alpha_k} b_j^{\beta_k}$  pour deux couples  $(\alpha_k, \beta_k)$  non proportionnels, d'où  $\frac{a_i}{a_j} = \left(\frac{b_j'}{b_i}\right)^{r_k}$  pour deux rationnels  $r_1$  et  $r_2$  différents ce qui donne  $a_i = a_j'$  et  $b_i = b_j'$ ). On peut prendre par exemple pour  $s_h$  la puissance  $h^{\text{ième}}$  de la permutation circulaire  $i \mapsto i+1$  modulo  $n$ . Il y a  $4n$  paramètres et  $n(k-1)$  relations de sorte que  $2 \leq k \leq 4$  et nous obtenons ainsi des identités de degré 4, 6 ou 8.

En degré 4,  $(ax+b)^4 - (ax-b)^4 + (cx-d)^4 - (cx+d)^4 = Ax$  avec  $A = 8(ab^3 - cd^3)$  si  $a^3b = c^3d$ . Là, une analyse directe permet de supposer  $(a, c) = 1$ . Alors  $b = rc^3$  et  $d = ra^3$  d'après le lemme d'Euclide; choisissant  $a = 1, c = 2$  et  $r = 1$ , on obtient (5) et aucun choix de  $a, c$  et  $r$  ne permet d'obtenir de meilleure identité.

En degré 6, il y a 8 paramètres liés par les 4 relations:  $a_i^5 b_i = a_i'^5 b_i'$  et  $a_i^3 b_i^3 = a_{i+1}'^3 b_{i+1}'^3, i = 1, 2$ .

En passant au logarithme on obtient le système linéaire homogène

$$i = 1, 2, \begin{cases} 5a_i + b_i - 5a_i' - b_i' = 0 \\ a_i + b_i - a_{i+1}' - b_{i+1}' = 0, \end{cases}$$

où les 8 inconnues sont encore notées  $a_i, a_i', b_i, b_i'$ .

L'espace des solutions, de dimension 4, est formé des vecteurs

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, a_1', b_1', a_2', b_2')$$

$$= (u + v, 5w + h, u + w + h, v, u + v + w, h, u + h, v + 5w),$$

$u, v, w$  et  $h$  étant des scalaires. En repassant à l'exponentielle et en remplaçant  $ux$  par  $x$ , on obtient

$$(12) \quad (ux + w^5 h)^6 + (whx + v)^6 - (ux - w^5 h)^6 - (whx - v)^6$$

$$+ (vwx - h)^6 + (hx - v w^5)^6 - (vwx + h)^6 - (hx + v w^5)^6$$

$$= 12vwh(h^4 - v^4)(w^{24} - 1)x,$$

identité de Rao qu'on peut rendre homogène.

En degré 8, il y a 12 variables et 9 relations:

$$a_i^7 b_i = a_i'^7 b_i'; a_i^5 b_i^3 = a_{i+1}'^5 b_{i+1}'^3 \quad \text{et} \quad a_i^3 b_i^5 = a_{i+2}'^3 b_{i+2}'^5,$$

$i = 1, 2, 3$ . En linéarisant, on obtient un système homogène de 9 équations linéaires à 12 inconnues encore notées  $(a_i, a_i', b_i, b_i')$ ; l'espace vectoriel des solutions, de dimension au moins 3, contient le plan engendré par les vecteurs  $(a_i = a_i' = 1; b_i = b_i' = 0)$  et  $(a_i = a_i' = 0; b_i = b_i' = 1)$ . Il suffit de trouver les solutions du système vérifiant  $a_1 = b_1' = 0$ ; la première équation devient  $b_1 - 7a_1' = 0$  et on prend  $a_1'$  comme paramètre d'où un système de huit équations à huit inconnues  $a_i, a_i', b_i, b_i', i \geq 2$ . Le rang du système est 7 et sa résolution donne deux autres solutions indépendantes du système initial

$$(5, 6, 0, 6, 5, 0; 7, 0, 10, 0, 7, 10)$$

et

$$(0, 5, 6, 0, 6, 5; 10, 7, 0, 10, 0, 7),$$

ce qui donne, en rendant homogène

$$\begin{aligned} & (a^5 c^{12} x + a^7 b^{10})^8 + (a^6 b^5 c^6 x + b^7 c^{10})^8 + (b^6 c^{11} x + a^{10} c^7)^8 \\ & - (a^5 c^{12} x - a^7 b^{10})^8 - (a^6 b^5 c^6 x - b^7 c^{10})^8 - (b^6 c^{11} x - a^{10} c^7)^8 \\ (13) \quad & + (a^6 c^{11} x - b^{10} c^7)^8 + (a^5 b^6 c^6 x - a^7 c^{10})^8 + (b^5 c^{12} x - a^{10} b^7)^8 \\ & - (a^6 c^{11} x + b^{10} c^7)^8 - (a^5 b^6 c^6 x + a^7 c^{10})^8 - (b^5 c^{12} x + a^{10} b^7)^8 \\ & = 16a^6 b^6 c^{12} (c^{16} - a^{16}) (c^{16} - b^{16}) (b^{16} - a^{16}) R x \end{aligned}$$

où  $R$  est la somme de six monômes:  $\Sigma a^{32} b^{32} + \Sigma a^{32} b^{16} c^{16}$ .

Cette identité est de degré total 136 en  $a, b, c$  alors que l'identité analogue de [8] est de degré 1128; cela permet donc de dire que  $\nu_*(8) \leq 12$  et  $\nu(8) \leq 28$  comme le dit le titre de [8].

En degré 10 et plus, nous n'avons pas de tel schéma de simplification; cependant la construction précédente donne des identités en degré 5, 7 et 9 mais de longueur trop grande en degré 7 et 9 et qui en degré 5 donne par exemple l'identité (4). Nous partons en degré 5 de

$$\begin{aligned} P_{a,b,c}(x) &= (ax + b)^5 - (ax + b)^5 + (ax - c)^5 - (ax + c)^5 \\ &= C_5^3 a^3 (b^2 - c^2) x^3 + C_5^1 a (b^4 - c^4) x \quad \text{et} \quad P_{a,b,c}(x) - P_{a',b',c'}(x) \end{aligned}$$

est un polynôme du premier degré si et seulement si

$$a^3 (b^2 - c^2) = a'^3 (b'^2 - c'^2).$$

On peut faire plusieurs choix des six paramètres:  $a' = 2, a = c = b' = 1, b = 3$  et  $c' = 0$  donne l'identité (4). On peut aussi prendre

$$a = k\alpha\beta, \quad a' = k\alpha'\beta', \quad b = \frac{1}{2}(\alpha'^3 + \beta'^3), \quad c = \frac{1}{2}(\alpha'^3 - \beta'^3),$$

$$b' = \frac{1}{2}(\alpha^3 + \beta^3), \quad c' = \frac{1}{2}(\alpha^3 - \beta^3),$$

ce qui donne une identité plus complexe. On peut aussi choisir  $c = c' = 0$  et linéariser la relation  $a^3b^2 = a'^3b'^2$ , d'où l'identité

$$(14) \quad (x + vw^3)^5 + (x - vw^3)^5 - (w^2x + v)^5 - (w + 2x - v)^5 + 2(w^2x)^5 - 2x^5 = 10v^4w^2(w^{10} - 1)x,$$

identité de longueur 8 (on remarquera que le coefficient  $A$  de  $x$  du second membre est toujours un multiple de 11 car  $w^{12} - w^2 \equiv 0(11)$  et que  $\Delta(5; 11) = 5 > \Delta(5; 720)$  ou  $\Delta(5; 780)$ ).

En degré 7, on considère une somme

$$\sum_{i=1}^3 P_{a_i, b_i, c_i} - P_{a'_i, b'_i, c'_i}$$

on pose alors  $c_i = c'_i = 0$  et on a les quatre relations

$$a_i^5 b_i^2 = a'_i{}^5 b'_i{}^2 \quad \text{et} \quad a_i^3 b_i^4 = a'_{i+1}{}^3 b'_{i+1}{}^4$$

ce qui donne finalement l'identité

$$(15) \quad (b^4c^4x \pm ab^5c^3)^7 + (b^2c^4x \pm ab^3c^{10})^7 - (b^6x \pm ac^{13})^7 - (c^8x \pm ab^8)^7 + 2x^7(b^{42} + c^{56} - b^{28}c^{28} - b^{14}c^{28}) = 14ab^8c^{13}(b^{21} - c^{21})(c^{14} - b^7)x$$

dont le premier membre contient 16 puissances septièmes, ce qui est supérieur à  $v_*(7) \leq 2M(7) = 12$ .

De même en degré 9, on partira de

$$\sum_{i=1}^3 P_{a_i, b_i, 0} - P_{a'_i, b'_i, 0}$$

et on obtient par la même méthode (système linéaire de 9 équations à 12 inconnues) une identité dont le premier membre est la somme de 24 puissances 9<sup>èmes</sup>. Les coefficients  $a_i, a'_j, b_i, a'_j$  sont donnés dans le tableau suivant:

	$a$	$a'$	$b$	$b'$
1	$v^8$	$v^6$	$uw^{10}$	$uw^7w^{10}$
2	$w^6$	$w^8$	$uw^{10}w^7$	$uw^{10}$
3	$v^6w^8$	$v^8w^6$	$uw^7$	$uw^7$

Le coefficient de  $x$  de second membre est  $A = 18u^8v^8w^8(w^{18} - v^{18})Q(v, w)$  où  $Q$  est le polynôme

$$Q(x, y) = x^{54} + y^{54} - x^{54}y^{54} + x^{36} + y^{36} + x^{18}y^{18} + x^{36}y^{18} + x^{18}y^{36}.$$

La longueur de l'identité est 24 ce qui la rend pratiquement inutile.

## 5. RETOUR SUR LE PROBLÈME DE TARRY-ESCOTT

En degré  $k$  suffisamment petit, beaucoup d'identités et donc de majoration de  $v_*(k)$  proviennent de  $s$ -uples  $(a_1, \dots, a_s)$  et  $(b_1, \dots, b_s)$  dont les  $k - 2$  premières fonctions symétriques élémentaires coïncident. On écrira alors suivant une notation classique dans cette question  $[a_1, \dots, a_s]_{k-2} = [b_1, b_2, \dots, b_s]_{k-2}$ . La recherche systématique de tels  $s$ -uples se fait en général inductivement, à l'aide des deux opérations suivantes ([4], [6]).

LEMME. Si  $[a_1, \dots, a_r]_k = [b_1, \dots, b_r]_k$ , alors quel que soit  $x$

- 1)  $[a_1, \dots, a_r, b_1 + x, b_2 + x, \dots, b_{r+x}]_{k+1} = [a_1 + x, a_2 + x, \dots, a_r + x, b_1, b_2, \dots, b_r]_{k+1}$ .
- 2)  $[a_1, \dots, a_r, a_1 + x, \dots, a_r + x]_k = [b_1, \dots, b_r, b_1 + x, \dots, b_r + x]_k$ .

Naturellement la longueur des  $s$ -uples déduit par le procédé récurrent est le double des  $s$ -uples de départ mais un choix judicieux peut permettre de réduire cette longueur: en effet chaque fois que l'on a  $a_i + x = a_j$  (resp.  $b_u + x = b_v$ ) on pourra supprimer dans l'égalité des deux crochets, les termes égaux, aussi pour appliquer la règle en question on calcule  $\{a_i - a_j / i > j\}$  et  $\{b_i - b_j / i > j\}$  et on choisit pour  $x$  l'un des entiers qui est le plus souvent une différence de deux  $a_i$  et de deux  $b_i$ . Ainsi partant de  $[0, 3]_1 = [1, 2]_1$  en ajoutant 3 puis 5 puis 7, on trouve  $[0, 4, 5]_2 = [1, 2, 6]_2$ ,  $[0, 4, 7, 11]_3 = [1, 2, 9, 10]_3$  et  $[0, 4, 8, 16, 17]_4 = [1, 2, 10, 14, 18]_4$  ce qui montre que  $p(k) = k + 1$  pour  $k \leq 4$  et que  $v_*(k) = 2(k - 1)$  pour  $k \leq 6$ . On peut développer cette technique et s'essayer à trouver de nombreux exemples de  $s$ -uples vérifiant  $[a_1, \dots, a_s]_h = [b_1, \dots, b_s]_h$  mais il n'est pas évident de minimaliser  $s$  par rapport à  $h$ .

On peut aussi opérer littéralement en partant de  $[a, b]_1 = [c, a + b - c]_1$  en prenant  $x$  dans le  $\mathbf{Z}$ -module libre de base  $(a, b, c)$ . On prend  $x = b - a$  d'où  $[a, b + c - a, 2b - c]_2 = [c, a + b - c, 2b - a]_2$ ; ensuite on peut prendre  $y = a - 2b + c$  d'où