

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INFRASTRUCTURE DES CLASSES AMBIGES D'IDÉAUX DES ORDRES DES CORPS QUADRATIQUES RÉELS  
**Autor:** Halter-Koch, Franz / Kaplan, Pierre / Williams, Kenneth S. / Yamamoto, Yoshihiko  
**Kapitel:** §5. Troisième démonstration du Théorème 0 ([6], [3]).  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58743>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## §5. TROISIÈME DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 0 ([6], [3]).

Cette démonstration n'utilise pas les Propositions 2 et 4. En revanche nous aurons besoin de la Proposition suivante, qui est une conséquence immédiate des résultats de [7] et du Théorème 1.

PROPOSITION 7. Soit  $D$  un discriminant tel que  $N(\varepsilon_D) = -1$ ,  $C$  une classe ambige primitive dont l'idéal ambige réduit est  $I$  de norme  $D_1$  et

dont l'idéal symétrique est  $S = \left[ R, \frac{Q + \sqrt{D}}{2} \right]$ , et soit  $\alpha \in K^\times$  tel que

$$(5.1) \quad S = \alpha I, \quad 1 < \alpha \leq \varepsilon_D.$$

Alors

$$(5.2) \quad \varepsilon_D \left( \frac{Q + \sqrt{D}}{2} \right) = \alpha^2 D_1.$$

*Démonstration.* Soit  $P$  la période de  $C$ . Nous utilisons les notations du Théorème 1 et de [7], (5.3) à (5.5), et numérotions les idéaux de  $P$  de manière que  $I = I_0 \equiv \{a_{-1}, b_0, a_0\}$ ,  $S = I_\lambda \equiv \{a_{\lambda-1}, b_\lambda, a_\lambda\}$  avec  $a_{\lambda-1} = a_\lambda$ . D'après [7], (6.4) et (5.3) nous avons

$$(5.3) \quad \varepsilon_D = \varphi_1 \dots \varphi_{\lambda-1} \varphi_\lambda \varphi_{\lambda+1} \dots \varphi_l, \quad l = 2\lambda - 1,$$

où

$$\varphi_k = \frac{b_k + \sqrt{D}}{2a_k} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Comme  $I_\lambda$  est un idéal symétrique on a  $b_{\lambda+k} = b_{\lambda-k}$  et  $a_{\lambda-1-k} = a_{\lambda+k}$  pour tout  $k \in \mathbf{Z}$  si bien que

$$(5.4) \quad \varphi_{\lambda+k} = \varphi_{\lambda-k} \frac{a_{\lambda-k}}{a_{\lambda-k-1}}.$$

Utilisant (5.4) pour  $k = 1, \dots, \lambda - 1$  dans (5.3) on trouve, comme  $a_\lambda = a_{\lambda-1}$ ,

$$(5.5) \quad \varepsilon_D = (\varphi_1 \dots \varphi_{\lambda-1})^2 \varphi_\lambda \frac{a_\lambda}{a_0}.$$

D'après [7], (5.5) et Proposition 8,  $\alpha = \frac{a_\lambda}{a_0} \varphi_1 \dots \varphi_\lambda$  vérifie (5.1), si bien que (5.5) s'écrit  $\varepsilon_D \varphi_\lambda = \alpha^2 \frac{a_0}{a_\lambda}$ , ce qui, comme  $a_\lambda \varphi_\lambda = \frac{Q + \sqrt{D}}{2}$  et  $a_0 = D_1$  prouve (5.2).

Nous considérons maintenant un discriminant  $D \equiv 1 \pmod{4}$  tel que  $N(\varepsilon_D) = -1$ . On sait que, suivant le cas,  $\varepsilon_{4D} = \varepsilon_D$  ou  $\varepsilon_D^3$ . D'autre part il existe un homomorphisme  $\theta$  du groupe  $C_{4D}$  sur le groupe  $C_D$  ([7], Theorem 1) qui envoie la classe de l'idéal primitif  $[a, b + \sqrt{D}]$ , où  $ab \equiv 1 \pmod{2}$ , sur la classe de  $\left[ a, \frac{b + \sqrt{D}}{2} \right]$ . Avec ces notations nous avons

THÉORÈME 0 ([6], Theorem, [3], Theorem 5). *Soit  $D \equiv 1 \pmod{4}$  un discriminant tel que  $N(\varepsilon_D) = -1$ ,  $C$  une classe ambige primitive de discriminant  $4D$ . Soit  $l$  la longueur de la période de  $C$  et  $l'$  celle de la période de  $\theta(C)$ . Alors*

$$\begin{aligned} l &\equiv l' \pmod{4}, & \text{si } \varepsilon_{4D} &= \varepsilon_D^3, \\ l &\equiv l' + 2 \pmod{4}, & \text{si } \varepsilon_{4D} &= \varepsilon_D. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous considérons une classe primitive ambige  $C$  de  $O_{4D}$  et son image  $\theta(C)$  par l'homomorphisme  $\theta$  de  $C_{4D}$  sur  $C_D$ .

La période de  $C$  contient l'idéal ambige  $I_0 = [a, \sqrt{D}]$  où, d'après la Proposition 1,  $a \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $a \mid D$  et  $a < \sqrt{D}$ . Comme  $I_0 = [a, a + \sqrt{D}]$  la classe  $\theta(C)$  contient l'idéal  $J_0 = \left[ a, \frac{a + \sqrt{D}}{2} \right]$ , qui est ambige et réduit car  $a \mid D$  et  $a < \sqrt{D}$ . L'idéal  $J_0$  est donc l'idéal ambige réduit de  $\theta(C)$ .

D'autre part la période de  $C$  contient l'idéal symétrique  $I_\lambda = [M, N + \sqrt{D}]$  où  $D = M^2 + N^2$  avec  $M \equiv 1 \pmod{2}$  et  $(M, N) = 1$ . On voit que  $I_\lambda = [M, (M + N) + \sqrt{D}]$  et, comme  $M + N \equiv 1 \pmod{2}$ , l'idéal  $J = \left[ M, \frac{M + N + \sqrt{D}}{2} \right]$  est un idéal de  $\theta(C)$ . Or on a

$$\frac{D - (M + N)^2}{4M} = \frac{M^2 + N^2 - (M + N)^2}{4M} = -\frac{N}{2}.$$

Donc, d'après [7], Corollary 2,

$$J \sim \left[ -\frac{N}{2}, \frac{-M - N + \sqrt{D}}{2} \right] = \left[ \frac{N}{2}, \frac{-M + \sqrt{D}}{2} \right].$$

Mais, comme  $\theta(C)$  est une classe ambige,  $J \sim \left[ \frac{N}{2}, \frac{M + \sqrt{D}}{2} \right]$ , donc l'idéal

$\left[ \frac{N}{2}, \frac{M + \sqrt{D}}{2} \right]$  est l'idéal symétrique  $J_\mu$  de  $\theta(C)$ .

Posant  $I_\lambda = \alpha I_0$  avec  $1 < \alpha \leq \varepsilon_{4D}$  et  $J_\mu = \beta J_0$  avec  $1 < \beta \leq \varepsilon_D$  nous trouvons d'après (5.2)

$$\varepsilon_D \varepsilon_{4D} \left( \frac{M + \sqrt{D}}{2} \right) (N + \sqrt{D}) = a^2 \alpha^2 \beta^2.$$

Notant que  $\varepsilon_{4D} = \varepsilon_D$  ou  $\varepsilon_D^3$  et que

$$(5.6) \quad \left( \frac{M + \sqrt{D}}{2} \right) (N + \sqrt{D}) = \left( \frac{M + N + \sqrt{D}}{2} \right)^2$$

nous obtenons, en prenant la racine carrée de nombres réels positifs,

$$a\alpha\beta = \begin{cases} \varepsilon_D^2 \left( \frac{M + N + \sqrt{D}}{2} \right), & \text{si } \varepsilon_{4D} = \varepsilon_D^3, \\ \varepsilon_D \left( \frac{M + N + \sqrt{D}}{2} \right), & \text{si } \varepsilon_{4D} = \varepsilon_D. \end{cases}$$

Comme la norme  $N \left( \frac{M + N + \sqrt{D}}{2} \right) = \frac{MN}{2} > 0$  et  $N(\varepsilon_D) = -1$  on voit que  $N(\alpha\beta) > 0$ , c'est-à-dire  $\lambda \equiv \mu \pmod{2}$ , si, et seulement si,  $\varepsilon_{4D} = \varepsilon_D^3$ , ce qui démontre le Théorème 0.

*Remarque.* Ce qui, dans cette démonstration, joue le rôle de la Proposition 4 est l'égalité (5.6).

On peut démontrer de manière analogue (4.1) à partir de (3.7) et (5.2), sans utiliser (3.5), après avoir montré que  $S'$  est principal de la manière suivante:

Nous supposons  $D \equiv 0 \pmod{4}$ , le cas  $D \equiv 1 \pmod{4}$  est analogue. Avec les notations de la Proposition 4 et du Théorème 2 on écrit (5.2) pour la classe  $C$  et pour la classe principale respectivement.

$$\varepsilon_D(N + \sqrt{D}) = \alpha^2 D_1$$

et  $\varepsilon_D(n + \sqrt{D}) = \alpha_0^2$ .

Multipliant et tenant compte de (3.7) on obtient

$$(5.7) \quad \varepsilon_D^2 \frac{\gamma^2}{D_1} = \alpha^2 \alpha_0^2 D_1 .$$

Comme tous les nombres intervenant dans (5.7) sont positifs, on a

$$\varepsilon_D \gamma = \alpha \alpha_0 D_1$$

ce qui, au vu de (3.6), donne (4.1) en comparant les signes des normes des deux membres.

*Remerciements.* Les auteurs remercient le Professeur Hideo Wada (Université Sophia, Tokyo, Japon) pour ses remarques qui leur ont permis de parfaire leur texte.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] GAUSS, C.F. *Disquisitiones Arithmeticae*. Traduction française, Librairie Blanchard (1979). Traduction allemande dans *Untersuchungen über höhere Arithmetik*, Chelsea Publishing Co., New York (1965).
- [2] HILBERT, D. *Die Theorie der Algebraischen Zahlkörper*. Werke I, Springer (1932).
- [3] ISHII, N., P. KAPLAN and K.S. WILLIAMS. On Eisenstein's problem. *Acta Arithmetica* 54 (1990), 323-345.
- [4] KAPLAN, P. *Cours d'Arithmétique*. U.E.R. de Mathématiques, Université de Nancy 1, tome 3 (1973).
- [5] ——— Comparaison des 2-groupes des classes d'idéaux au sens large et au sens étroit d'un corps quadratique réel. *Proc. Japan Acad.* 50 (1974), 688-693.
- [6] KAPLAN, P. and K.S. WILLIAMS. Pell's equation  $X^2 - mY^2 = -1, -4$  and continued fractions. *Journal of Number Theory* 23 (1986), 169-182.