

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE
ALGÈBRIQUE PROJECTIF
Autor: Chéniot, Denis
Kapitel: 3. Eclatement stratifié et fibration hors des hyperplans mauvais
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58744>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

5 et 6 d'autre part. On peut aussi en avoir une vue d'ensemble rapide grâce à la figure 3.2. D'autres notations, utiles seulement pour les besoins d'un paragraphe sont introduites au cours de ceux-ci.

Nous utiliserons, pour la durée de la démonstration du théorème 1.3 au long des §§3 à 8, la convention d'écriture suivante:

(2.1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{L'apposition d'un indice } k \text{ à une lettre latine désignant une} \\ \text{application continue signifiera qu'on considère l'homomorphisme} \\ \text{induit par cette application entre les groupes d'homologie singulière} \\ \text{à coefficients entiers de rang } k. \end{array} \right.$

Les notations de l'énoncé du théorème 1.3 sont déjà cohérentes avec cette convention; par exemple, l'homomorphisme induit en homologie de rang k par l'injection canonique $l: \mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A) \hookrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ y est noté $l_k: H_k(\mathcal{L} \cap (\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)) \rightarrow H_k(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A)$.

Pour faire place aux indices inférieurs utilisés dans le cadre de la convention (2.1), nous avons dû parfois mettre en position supérieure d'autres indices qu'il aurait été autrement plus naturel de mettre en position inférieure. C'est par exemple le cas de l'indice i dans les homomorphismes m_k^i du théorème 1.3.

Pour éviter toute confusion, nous utiliserons des lettres indexées *grecques* pour désigner des homomorphismes entre groupes d'homologie qui ne sont pas induits par une application. Ce sera par exemple le cas pour certains homomorphismes bord et pour les homomorphismes notés $\bar{\nu}_k$ et τ_k aux paragraphes 4 et 5 qui désigneront des isomorphismes dérivés de ceux de Wang et de Leray.

Tous les groupes d'homologie considérés dans cet article sont des groupes d'homologie singulière à coefficients entiers. Les seules topologies considérées sont les topologies ordinaires.

3. ECLATEMENT STRATIFIÉ ET FIBRATION HORS DES HYPERPLANS MAUVAIS

Dans ce paragraphe, nous précisons et justifions l'assertion d'«isotopie» de l'introduction. On pense évidemment à une fibration localement triviale stratifiée dont les bons hyperplans du pinceau seraient les fibres. Mais on veut donc enlever $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$ tout en conservant l'axe \mathcal{M} dans chaque fibre: un moyen d'y parvenir est de «répéter» \mathcal{M} autant de fois qu'il y a de directions d'hyperplan dans le pinceau \wedge . Cela est précisément réalisé par un éclatement de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de \mathcal{M} . Cette idée apparaît déjà sous une autre forme dans [Wa]; on la trouve ensuite sous la forme présente dans [A-F2] et elle est reprise

de manière stratifiée dans [Ch1] que nous suivrons et auquel nous renverrons pour plusieurs démonstrations.

Nous construisons un éclaté $\tilde{\mathbf{P}}^n$ de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de \mathcal{M} de la manière suivante: Soit Δ une droite projective de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ ne rencontrant pas \mathcal{M} . Nous considérons la projection de centre \mathcal{M} sur Δ qui à tout point $x \notin \mathcal{M}$ associe l'unique point d'intersection avec Δ de l'hyperplan projectif déterminé par \mathcal{M} et x . En composant avec un isomorphisme projectif de Δ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, on obtient une «projection»

$$(3.1) \quad p: \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) .$$

C'est une application analytique submersive. Si \mathcal{H} est un élément du pinceau Λ d'axe \mathcal{M} , l'image par p de $\mathcal{H} \setminus \mathcal{M}$ est réduite à un seul point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qui représente la direction de \mathcal{H} . Pour tout $\kappa \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, notons $\mathcal{H}(\kappa)$ l'unique élément de Λ tel que $p(\mathcal{H}(\kappa) \setminus \mathcal{M}) = \{\kappa\}$. Nous définissons alors:

$$(3.2) \quad \tilde{\mathbf{P}}^n = \{(x, \kappa) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \mid x \in \mathcal{H}(\kappa)\} .$$

C'est une sous-variété analytique compacte pure de dimension n de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (cf. [Ch1] 2.1). Nous définissons aussi sur $\tilde{\mathbf{P}}^n$ le *morphisme d'éclatement*

$$(3.3) \quad f: \tilde{\mathbf{P}}^n \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) ,$$

et la *projection*

$$(3.4) \quad \tilde{p}: \tilde{\mathbf{P}}^n \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) ,$$

comme étant les restrictions à $\tilde{\mathbf{P}}^n$ des première et seconde projections de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ respectivement. Ainsi donc, dans cette construction, la direction de chaque hyperplan de Λ est repérée par un point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et $\tilde{\mathbf{P}}^n$ est composé des points de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ accompagnés de la direction sous laquelle ils sont vus depuis \mathcal{M} , étant entendu que les points de \mathcal{M} sont vus dans toutes les directions; le morphisme f consiste à oublier cette direction et le morphisme \tilde{p} à la désigner.

Dans cet éclatement, \mathcal{M} est donc remplacé par sa *transformée totale*

$$(3.5) \quad \tilde{\mathcal{M}} = f^{-1}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) .$$

C'est une sous-variété fermée de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ donc de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ et ses structures comme sous-variété et comme variété produit coïncident. Cette structure de produit jouera, répétons-le, un rôle trivialisant essentiel pour tout ce qui pourra être «poussé dans l'axe». Les restrictions de f et \tilde{p} à $\tilde{\mathcal{M}}$ coïncident

avec la première et la deuxième projection. Par ailleurs, l'éclatement ne change rien en dehors de \mathcal{M} car f induit un isomorphisme analytique

$$(3.6) \quad \tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \mathcal{M}.$$

La restriction de \tilde{p} à $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{\mathcal{M}}$ coïncide à cet isomorphisme près avec p .

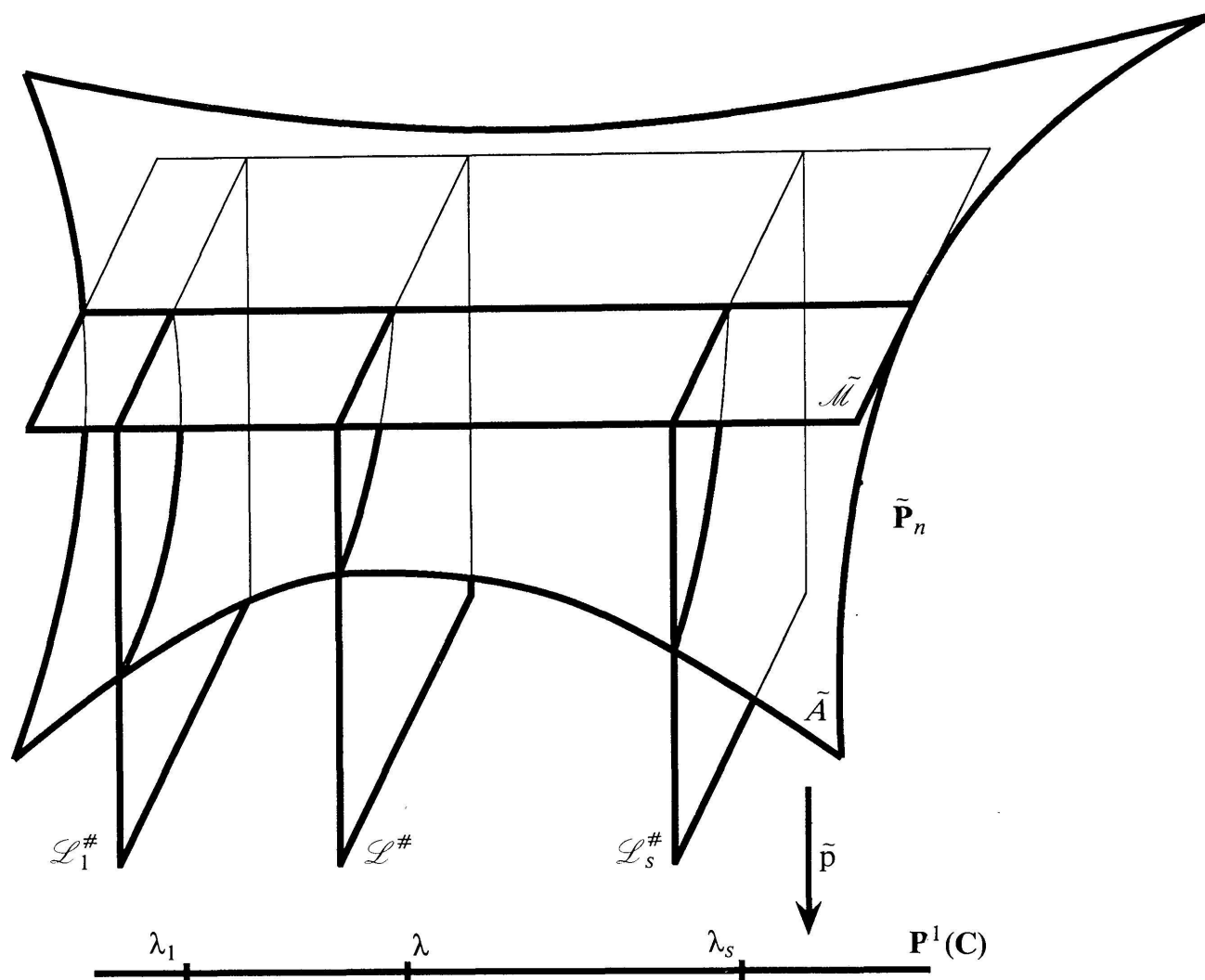


FIGURE 3.1

Pour toute partie E de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, nous considérons, de même que pour \mathcal{M} , sa *transformée totale* dans l'éclatement

$$(3.7) \quad \tilde{E} = f^{-1}(E)$$

et particulièrement la transformée totale \tilde{A} de l'ensemble algébrique A . Mais pour les hyperplans \mathcal{L} et $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$, plus généralement pour un élément quelconque \mathcal{H} du pinceau Λ , il nous sera préférable de considérer sa *transformée stricte*

$$(3.8) \quad \mathcal{H}^\# = \overline{f^{-1}(\mathcal{H} \setminus \mathcal{M})},$$

l'adhérence étant prise pour la topologie ordinaire, la seule que nous considérerons dans cet article. L'avantage de considérer la transformée stricte au lieu de la transformée totale est que f induit des isomorphismes

$$(3.9) \quad \mathcal{H}^\# \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$$

$$(3.10) \quad \mathcal{H}^\# \cap \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

pour tout hyperplan \mathcal{H} de Λ , en particulier pour \mathcal{L} et pour $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$ (cf. fig. 3.1). En effet, pour tout $\mathcal{H} \in \Lambda$ de direction κ c'est-à-dire tel que $p(\mathcal{H} \setminus \mathcal{M}) = \{\kappa\}$, on a les relations

$$(3.11) \quad \mathcal{H}^\# = \mathcal{H} \times \{\kappa\} = \tilde{p}^{-1}(\kappa).$$

Cette formule interprète aussi les transformées strictes des éléments de Λ comme les fibres de la projection \tilde{p} . Mais cette fois on peut enlever $\mathcal{L}_1^\#, \dots, \mathcal{L}_s^\#$ à $\tilde{\mathbf{P}}^n$ sans toucher aux autres fibres de \tilde{p} qui restent alors isomorphes aux bons hyperplans de Λ , axe compris. C'est donc \tilde{p} qui va nous donner, en dehors de $\mathcal{L}_1^\#, \dots, \mathcal{L}_s^\#$, la fibration localement triviale rendant compte de l'«isotopie» dont nous avons parlé dans l'introduction. Elle en rendra vraiment compte si elle respecte $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}$ ainsi que \tilde{S} pour toute strate S de A et si elle respecte aussi $\tilde{\mathcal{M}}$. Comme \tilde{p} est propre puisque $\tilde{\mathbf{P}}^n$ est compact, nous pourrons déduire une telle fibration du premier théorème d'isotopie de Thom-Mather si nous construisons une stratification de Whitney $\tilde{\mathcal{S}}$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ telle que les \tilde{S} et $\tilde{\mathcal{M}}$ soient unions de strates de $\tilde{\mathcal{S}}$ et telle que \tilde{p} soit submersive sur toutes ces strates pourvu qu'on se restreigne à $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus (\mathcal{L}_1^\# \cup \dots \cup \mathcal{L}_s^\#)$.

Rappelant la notation (3.7), nous posons

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}} = & \{ \tilde{S} \setminus \tilde{\mathcal{M}} \mid S \in \mathcal{S} \} \cup \{ \tilde{S} \cap \tilde{\mathcal{M}} \mid S \in \mathcal{S} \} \\ & \cup \{ (\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}) \setminus \tilde{\mathcal{M}}, (\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}) \cap \tilde{\mathcal{M}} \}. \end{aligned}$$

LEMME 3.13. *La partition $\tilde{\mathcal{S}}$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ est une stratification de Whitney vérifiant les conditions suivantes:*

- (i) $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A}$, les \tilde{S} pour $S \in \mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{M}}$ sont réunions de strates;
- (ii) si $\mathcal{H} \in \Lambda$ est un «bon» hyperplan transverse à toutes les strates de \mathcal{S} dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, alors $\mathcal{H}^\#$ est transverse à toutes les strates de $\tilde{\mathcal{S}}$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$.

Démonstration. Elle est donnée dans [Ch1] proposition (2.2.1) (l'hypothèse faite dans [Ch1] que A est une hypersurface n'y intervient pas). Le fait que \mathcal{M} soit transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de \mathfrak{S} y joue un rôle essentiel. Il implique en effet d'une part que $\tilde{\mathbf{P}}^n$ est transverse dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ à $S \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ pour tout $S \in \mathfrak{S}$ et alors $\tilde{S} = (S \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})) \cap \tilde{\mathbf{P}}^n$ est obtenue par section transversale de $S \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Il implique d'autre part que $\tilde{\mathcal{M}}$ est transverse dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ aux \tilde{S} . On conclut alors à l'aide du lemme (2.2.2) de [Ch1] qui affirme qu'étant donnée une stratification de Whitney, son produit par une variété constante, sa section par une sous-variété fermée transverse et cette section union son complémentaire forment aussi des stratifications de Whitney. Notons toutefois que la démonstration de ce lemme dans [Ch1] utilise comme allant de soi le fait suivant: soient S, S' deux strates avec $S' \subset \tilde{S}$ et soit V une sous-variété de l'espace ambiant transverse à S et S' ; si (x_k) est une suite de points de $S \cap V$ convergeant vers un point x de $S' \cap V$ telle que les espaces tangents $T_{x_k}S$ aient une limite T , alors $T_{x_k}S \cap T_{x_k}V$ converge vers $T \cap T_xV$. Cela n'est en fait vrai que grâce à la propriété (a) de Whitney vérifiée par le couple (S, S') au point x ; pour plus de détails cf. [Ch3] §5 de la 2^e partie. \square

Remarquons maintenant que \tilde{p} est une submersion. En effet, la restriction de \tilde{p} à l'ouvert $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{\mathcal{M}}$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ coïncide, à l'isomorphisme (3.6) près, avec p qui est une submersion; et \tilde{p} est aussi submersive en tout point de $\tilde{\mathcal{M}}$ car sa restriction à $\tilde{\mathcal{M}}$, qui coïncide avec la deuxième projection, est déjà submersive. Compte tenu de cette submersivité globale de \tilde{p} , la condition (ii) du lemme 3.13 implique que

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la restriction de } \tilde{p} \text{ à chaque strate de } \tilde{\mathfrak{S}} \text{ est submersive en tout} \\ \text{point non situé sur les transformées strictes } \mathcal{L}_1^\#, \dots, \mathcal{L}_s^\# \text{ des} \\ \text{hyperplans «mauvais»}. \end{array} \right.$$

En effet, soit S une strate de $\tilde{\mathfrak{S}}$, soit x un point de S et soit $\mathcal{H}^\#$ l'unique transformée stricte d'élément de \wedge passant par x (on a $p(\mathcal{H}^\# \setminus \mathcal{M}) = \{\tilde{p}(x)\}$). Si ι est l'injection canonique de S dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$, l'application linéaire tangente $T_x(\tilde{p}|_S)$ à $\tilde{p}|_S$ est égale à $T_x\tilde{p} \circ T_x\iota$ et, compte tenu de la surjectivité de $T_x\tilde{p}$, cette application est surjective si et seulement si $\text{Im } T_x\iota + \text{Ker } T_x\tilde{p} = T_x\tilde{\mathbf{P}}^n$ (cf. le lemme algébrique 7.4 ci-dessous). Mais $\text{Im } T_x\iota = T_xS$ et $\text{Ker } T_x\tilde{p} = \mathcal{H}^\#$ donc cette égalité est équivalente à la transversalité de $\mathcal{H}^\#$ à S en x dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$.

Définissons alors les points λ et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\lambda\} = p(\mathcal{L} \setminus \mathcal{M}) \\ \{\lambda_i\} = p(\mathcal{L}_i \setminus \mathcal{M}) \end{array} \right. \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s,$$

de sorte que

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^\# = \tilde{p}^{-1}(\lambda) \\ \mathcal{L}_i^\# = \tilde{p}^{-1}(\lambda_i) \end{array} \right. \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s,$$

et posons

$$(3.17) \quad \mathbf{P}_*^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$$

$$(3.18) \quad \tilde{\mathbf{P}}_*^n = \tilde{\mathbf{P}}^n \setminus (\mathcal{L}_1^\# \cup \dots \cup \mathcal{L}_s^\#) = \tilde{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathbf{P}_*^1)$$

$$(3.19) \quad \tilde{\mathfrak{p}}_* : \tilde{\mathbf{P}}_*^n \rightarrow \mathbf{P}_*^1 \quad \text{l'application induite par } \tilde{\mathfrak{p}}$$

$$(3.20) \quad \tilde{\mathfrak{S}}_* = \tilde{\mathfrak{S}}|_{\tilde{\mathbf{P}}_*^n} = \{S \cap \tilde{\mathbf{P}}_*^n \mid S \in \tilde{\mathfrak{S}} \text{ et } S \cap \tilde{\mathbf{P}}_*^n \neq \emptyset\}.$$

Alors il est aisé de voir que la restriction $\tilde{\mathfrak{S}}_*$ de $\tilde{\mathfrak{S}}$ à l'ouvert $\tilde{\mathbf{P}}_*^n$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ est une stratification de Whitney de $\tilde{\mathbf{P}}_*^n$ (pour plus de détails, cf. [Ch3] §5 de la 2^e partie) et $\tilde{\mathfrak{p}}_*$ est une application propre submersive sur toutes les strates de $\tilde{\mathfrak{S}}_*$. Nous sommes donc en situation d'appliquer le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather (cf. [Ma] proposition 11.1 et corollary 10.3). Il faut toutefois remarquer au préalable que ce théorème est énoncé pour des ensembles munis d'une préstratification de Whitney *réelle*. Mais pour une stratification complexe, les conditions de Whitney au sens complexe impliquent les conditions de Whitney pour les variétés réelles sous-jacentes aux strates. D'autre part la submersivité au sens complexe de $\tilde{\mathfrak{p}}_*$ implique sa submersivité au sens réel car l'espace tangent en un point à la variété réelle sous-jacente à une strate est l'espace vectoriel réel sous-jacent à l'espace tangent complexe. Nous pouvons donc bien appliquer le théorème de Thom-Mather et nous obtenons :

PROPOSITION 3.21. *L'application $\tilde{\mathfrak{p}}_*$ est une fibration topologique localement triviale de $\tilde{\mathbf{P}}_*^n$ sur \mathbf{P}_*^1 respectant les strates de $\tilde{\mathfrak{S}}_*$ donc respectant les traces sur $\tilde{\mathbf{P}}_*^n$ de $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{\mathcal{A}}$, des \tilde{S} pour $S \in \mathfrak{S}$ et de $\tilde{\mathcal{M}}$. La fibre au-dessus de λ (direction du « bon » hyperplan \mathcal{L}) est $\mathcal{L}^\#$.* □

Cette proposition rend compte précisément de l'« isotopie » dont il a été question dans l'introduction.

Remarque 3.22. Nous avons dit de cette « isotopie » qu'elle laissait l'axe du pinceau \wedge globalement invariant et cela est justifié dans la proposition 3.21 par le fait que la fibration respecte la transformée totale $\tilde{\mathcal{M}}$ de l'axe. En fait, cette « isotopie » peut même être construite de manière à laisser l'axe *point par point invariant*. Pour le justifier, il faut revenir sur la manière dont le premier théorème d'isotopie est établi dans [Ma] et se souvenir qu'il porte ce nom parce que la fibration localement triviale respectant la stratification y est démontrée en réalisant une isotopie de la fibre le long des courbes intégrales d'un champ de vecteurs « contrôlé » au-dessus d'un champ de vecteurs donné de la base. Comme les strates de $\tilde{\mathcal{M}} \cap \tilde{\mathbf{P}}_*^n = \mathcal{M} \times \mathbf{P}_*^1$ sont de la forme $(S \cap \mathcal{M}) \times \mathbf{P}_*^1$ pour $S \in \mathfrak{S}$ ou $S = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \mathcal{A}$, ce relèvement peut être fait trivialement sur $\tilde{\mathcal{M}}$, et le champ de vecteurs contrôlé peut ensuite être prolongé à $\tilde{\mathbf{P}}_*^n \setminus \tilde{\mathcal{M}}$ sans avoir à toucher celui sur $\tilde{\mathcal{M}} \cap \tilde{\mathbf{P}}_*^n$ puisque $\tilde{\mathcal{M}}$ est fermé et que la construction sur une strate n'est affectée que par ce qui se passe sur les strates contenues dans

son adhérence (cf. [Ma] §9). L'isotopie de $\mathcal{L}^\#$ correspondant à un tel champ de vecteurs a alors lieu trivialement sur $\mathcal{M} \times \mathbf{P}_*^1$ et lorsqu'on redescend à $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ par le morphisme d'éclatement f , on trouve une « isotopie » de \mathcal{L} qui respecte \mathcal{S} et $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A$ et qui de plus laisse $\cdot //$ fixe point par point.

A partir de maintenant, nous ne nous intéressons plus qu'à ce qui se passe en dehors de A , ce qui signifie que nous ne considérons dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ que ce qui se passe hors de \tilde{A} . Nous sommes donc amenés à introduire les notations simplificatrices suivantes (cf. fig. 3.2), valables pour le temps de la démonstration du théorème 1.3, c'est-à-dire jusqu'à la fin du §8 :

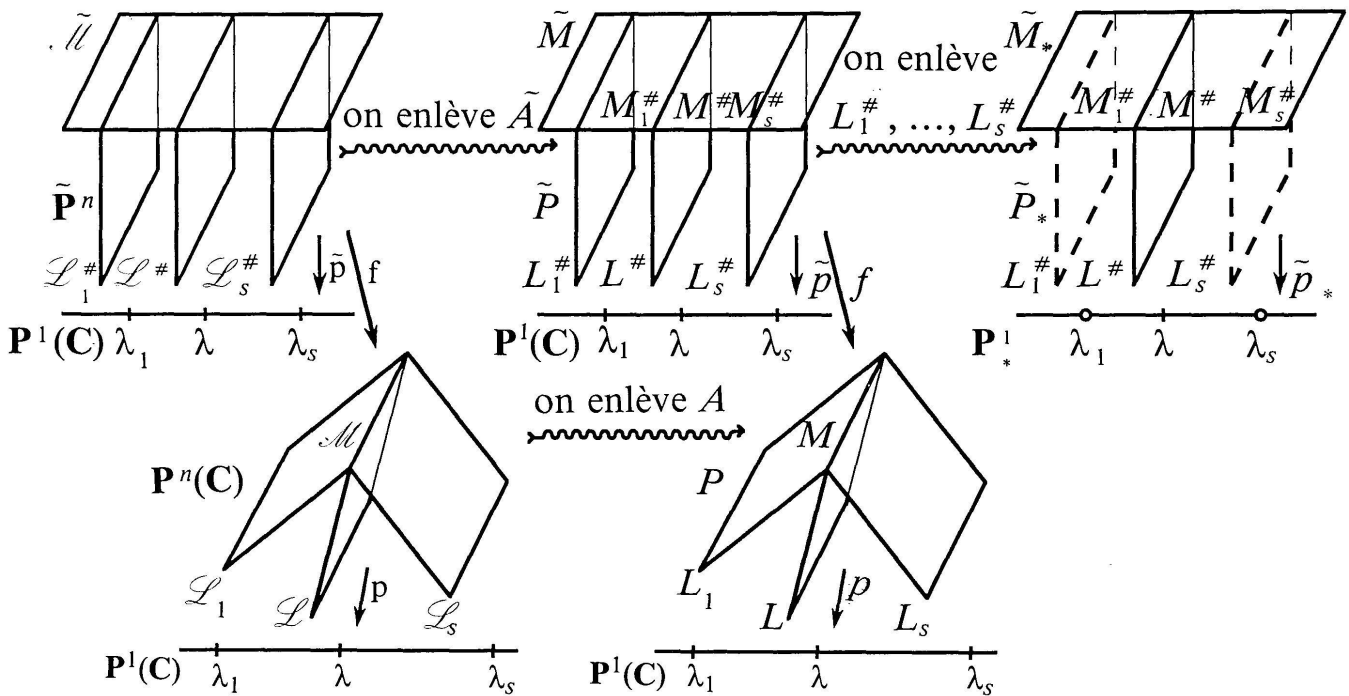


FIGURE 3.2

$$(3.23) \quad \begin{cases} P = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus A \\ L = \mathcal{L} \cap P \\ L_i = \mathcal{L}_i \cap P \\ M = \mathcal{M} \cap P \end{cases} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s$$

$$(3.24) \quad \begin{cases} \tilde{P} = \tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{A} \\ \tilde{M} = \tilde{\mathcal{M}} \cap \tilde{P} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \end{cases}$$

$$(3.25) \quad \begin{cases} L^\# = \mathcal{L}^\# \cap \tilde{P} \\ L_i^\# = \mathcal{L}_i^\# \cap \tilde{P} \\ M^\# = L^\# \cap \tilde{M} = M \times \{\lambda\} \\ M_i^\# = L_i^\# \cap \tilde{M} = M \times \{\lambda_i\} \end{cases} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s$$

$$(3.26) \quad \tilde{p}: \tilde{P} \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \quad \text{restriction de } \tilde{p}$$

$$(3.27) \quad \begin{cases} \tilde{P}_* = \tilde{P} \cap \tilde{\mathbf{P}}_*^n = \tilde{P} \setminus (L_1^\# \cup \dots \cup L_s^\#) \\ \tilde{M}_* = \tilde{M} \cap \tilde{P}_* = \tilde{M} \setminus (M_1^\# \cup \dots \cup M_s^\#) = M \times \mathbf{P}_*^1 \end{cases}$$

$$(3.28) \quad \tilde{p}_*: \tilde{P}_* \rightarrow \mathbf{P}_*^1 \quad \begin{array}{l} \text{restriction de } \tilde{p}_*, \\ \text{induite aussi par } \tilde{p} \text{ ou } \tilde{p}. \end{array}$$

On peut définir la transformée stricte d'une partie quelconque E de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ comme étant égale à $f^{-1}(E) \cap \overline{f^{-1}(E \setminus \mathcal{M})}$, ce qui est cohérent avec la définition (3.8) concernant les hyperplans de \wedge car ceux-ci sont fermés. Avec cette définition, $L^\#$ et les $L_i^\#$ sont bien les transformées strictes respectives de L et des L_i . Mais il n'en est pas de même pour $M^\#$ et les $M_i^\#$ par rapport à M et aux M_i . Nous avons malgré tout adopté ces notations en raison de l'analogie entre les relations (3.25) qui les définissent. Notons d'autre part que, d'après (3.9) et (3.10), le morphisme d'éclatement f induit les isomorphismes suivants:

$$(3.29) \quad \begin{cases} L^\# \xrightarrow{\sim} L \\ L_i^\# \xrightarrow{\sim} L_i \\ M^\# \xrightarrow{\sim} M \\ M_i^\# \xrightarrow{\sim} M \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour } 1 \leq i \leq s \\ \text{pour } 1 \leq i \leq s. \end{array}$$

En relation avec la structure de produit de \tilde{M} , notons aussi que les isomorphismes concernant $M^\#$ et $M_i^\#$ sont réciproques des identifications canoniques de M à $M \times \{\lambda\}$ et $M \times \{\lambda_i\}$. Remarquons enfin que, comme nous avons écarté le cas trivial où $P = \emptyset$, la transversalité de \mathcal{M} dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ aux strates de \mathfrak{S} implique (cf. (9.6.4)) que M donc tous les espaces que nous avons considérés ci-dessus sont non vides.

Voici alors le corollaire de la proposition 3.21 que nous aurons à considérer:

COROLLAIRE 3.30. *L'application \tilde{p}_* est une fibration localement triviale topologique de \tilde{P}_* sur \mathbf{P}_*^1 avec $\tilde{M}_* = M \times \mathbf{P}_*^1$ comme sous-fibré trivial. Les fibres au-dessus de λ sont respectivement $L^\#$ et $M^\#$. \square*

Par *sous-fibré* nous entendons une partie de l'espace total du fibré ambiant, qui non seulement est fibrée par la même projection sur la même base mais aussi pour laquelle il existe des trivialisations locales qui s'étendent en des trivialisations locales du fibré ambiant. Nous qualifierons de *simultanées* de telles trivialisations locales du fibré ambiant et du sous-fibré.