Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DU COMPLÉMENTAIRE D'UN ENSEMBLE ALGÉBRIQUE PROJECTIF

Autor: Chéniot, Denis

Kapitel: 12. Directions de recherche

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58744

un théorème du type de Lefschetz valable pour une variété quasi-projective lisse générale et qui prenne en compte la codimension de A dans X. En effet, une fois qu'on est descendu en dimension jusqu'à ce que la trace de A soit vide ou réduite à un nombre fini de points, on se retrouve devant les particularités topologiques de X lui-même alors que, pour $X = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, on se retrouvait dans la situation simple d'un espace projectif. Voir la remarque 9.5 pour plus de détails et voir aussi (12.2).

12. Directions de recherche

Le cadre géométrique développé dans cet article permet vraisemblablement d'aborder quelques autres problèmes que voici. En particulier, je peux déjà annoncer une généralisation du second théorème de Lefschetz (cf. (12.3)).

(12.1) *Sections par des hypersurfaces au lieu de sections hyperplanes.*

Au lieu de considérer, comme dans les théorèmes 1.3 et 11.1, un pinceau d'hyperplans dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, on peut considérer un système linéaire à un paramètre d'hypersurfaces de degré $d > 1$. Le morphisme de Véronèse v de degré d (cf. [La] 1.3) permet de plonger $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ de telle sorte qu'un tel système d'hypersurfaces soit transformé en les sections de $v(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ par un pinceau d'hyperplans de $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$. On doit pouvoir obtenir une extension des théorèmes 1.3 et 11.1 à ces systèmes à un paramètre d'hypersurfaces en appliquant le théorème 11.1 au pinceau d'hyperplans correspondant dans $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$. Mais interviendront alors, en plus, les points de tangence d'éléments de ce pinceau avec $v(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$; ces éléments exceptionnels correspondront à des hypersurfaces du système linéaire présentant des singularités. On devrait toutefois pouvoir en déduire, en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 11.2 que nous avons donnée, que le théorème 1.1 est aussi valable pour la section de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})\backslash A$ par une hypersurface lisse transverse aux strates d'une stratification de Whitney de A.

(12.2) *Extension du théorème 1.1 à certaines variétés quasi-projectives particulières.*

Nous avons vu pourquoi le théorème 1.1 ne pouvait être généralisé au cas où l'espace ambiant $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est remplacé par un ensemble algébrique fermé X de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, même en supposant $X\backslash A$ lisse (cf. remarques 11.4 et 9.5). On peut toutefois se demander s'il y a des classes significatives de X pour lesquelles il est valable. D'après (12.1), il y aurait en tout cas les variétés de Véronèse.

(12.3) *Cycles évanescents et cycles invariants.*

Dans la situation des théorèmes 1.3 et 11.1, c'est-à-dire celle d'un pinceau générique de sections hyperplanes d'une variété quasi-projective $X\backslash A$, on peut considérer les *cycles évanescents* et les *cycles invariants* de la section de $X\backslash A$ par un hyperplan générique $\mathscr{L}$ du pinceau. Les cycles *évanescents* au voisinage d'un hyperplan exceptionnel $\mathscr{L}_i$ sont ceux qui deviennent homologues à 0 quand $\mathscr{L}$ tend vers $\mathscr{L}_i$. Les cycles *invariants* au voisinage de $\mathscr{L}_i$ sont ceux qui sont à homologie près invariants lors d'une monodromie autour de $\mathscr{L}_i$. On appelle cycles évanescents ceux qui sont engendrés par les cycles évanescents au voisinage de chacun des $\mathscr{L}_i$ et cycles invariants ceux qui sont invariants au voisinage de tous. Lefschetz les étudie longuement aux chapitres II, III et V de [Lf] dans le cas où $A = \varnothing$ et où X est projection générique d'une variété projective lisse (voir [La] pour une traduction en langage moderne; Lefschetz dit «évanouissant» au lieu d'«évanescent»). C'est sur ces cycles que portent le «second» théorème de Lefschetz et le théorème de Lefschetz «vache».

Dans la description géométrique que nous avons donnée aux §§3 à 8, ces cycles apparaissent comme suit: Reprenons les notations de ces paragraphes telles qu'elles sont résumées dans la figure 3.2, avec éventuellement l'adaptation (11.1.4) à la situation du théorème 11.1. Il nous faut admettre parmi les hyperplans exceptionnels un «bon» hyperplan $\mathscr{L}_\infty$ comme nous l'avons fait dans la démonstration du lemme 8.7. On peut alors, en (4.1), choisir comme bouquet de cercles B sur lequel $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \lambda_\infty\}$ se rétracte par déformation, un bouquet composé de s cercles C_i entourant chacun de près un seul des λ_i correspondant aux hyperplans vraiment «mauvais». Dans ces conditions, si l'on décompose $H_1(\mathbf{P}^1_*)$ en somme directe des $H_1(C_i)$, les classes d'homologie des k-cycles invariants au voisinage de chaque $\mathscr{L}_i$ sont données par le noyau de la restriction correspondante de l'homomorphisme ξ_{k+1} qui apparaît dans le corollaire 4.23: cela résulte des formules (4.25.1). D'autre part, si D_i est le disque délimité par C_i dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})\backslash\{\lambda_\infty\}$, les classes des k-cycles évanescents au voisinage de $\mathscr{L}_i$ forment, à l'isomorphisme de $L^\#$ avec L près, le noyau de l'homomorphisme naturel $H_k(L^\#) \to H_k(\tilde{p}^{-1}(D_i))$. Celles des cycles évanescents tout court forment le noyau de $H_k(L^\#) \to H_k(\tilde{P}\backslash L^\#_\infty)$.

Je crois pouvoir démontrer, en utilisant ce cadre géométrique, que le «second théorème de Lefschetz» peut être généralisé aux situations des théorèmes 1.1 et 11.2. Ce second théorème complète le théorème classique sur les sections hyperplanes en identifiant le noyau du premier homomorphisme dont on n'affirme pas la bijectivité comme étant formé des cycles évanescents.

Une démonstration complète en a été donnée dans le cas des sections d'une variété projective lisse par Wallace au moyen de méthodes proches de Lefschetz (cf. [Wa]) et par Andreotti et Frankel au moyen de la théorie de Morse (cf. [A-F2]). Je pense donc pouvoir l'étendre au cas d'une variété quasi-projective lisse et, d'autre part, à celui du complémentaire d'un ensemble algébrique fermé avec prise en compte de sa codimension, c'est-à-dire pour l'homomorphisme de rang $n + q - 2$. Cela fera l'objet d'une prochaine publication.

(12.4) *Relation entre sections génériques et sections exceptionnelles.*

Avec les hypothèses et notations du théorème 1.3, on a la relation

$$\text{(12.4.1)} \qquad \text{si } m_{k-1} \text{ est surjectif,} \qquad \text{alors} \qquad \operatorname{Ker} m_{k-2} \supset \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m^{i}_{k-2} \, .$$

Pour voir cela, on constate que, si m_{k-1} est surjectif, on a, avec les notations des §§3 à 8, $\operatorname{Im}(i_k \circ j_k) = \operatorname{Im} i_k$. Cette égalité signifie, en effet, que $i_k \circ j_k$ considérée comme prenant ses valeurs dans $\operatorname{Im} i_k$ est surjective, donc est équivalente, d'après le lemme 7.4, à la relation (7.6.1) qui a été prouvée dans la démonstration du lemme 7.6 sous l'hypothèse de surjectivité de m_{k-1}. Si l'on ajoute alors, comme dans la démonstration du lemme 8.7, un «bon» hyperplan $\mathscr{L}_\infty$ distinct de $\mathscr{L}$ aux hyperplans «mauvais», on a, avec les notations de cette démonstration, $\operatorname{Im} i^*_k = \operatorname{Im} i_k$ car $\operatorname{Im}(i_k \circ j_k) \subset \operatorname{Im} i^*_k \subset \operatorname{Im} i_k$ puisque j se factorise à travers $\widetilde{P}_{**}$. Mais, d'après la démonstration du lemme 8.6, on a, d'autre part,

$$\operatorname{Im} \sigma_k \cap \operatorname{Im} i_k = \sigma_k \Big(\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m^{i}_{k-2} \Big)$$

et aussi, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 8.7

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sigma_k \cap \operatorname{Im} i^*_k &= \sigma_k \Big(\operatorname{Ker} m^{\infty}_{k-2} \cap \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m^{i}_{k-2} \Big) \\ &= \sigma_k \Big(\operatorname{Ker} m_{k-2} \cap \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m^{i}_{k-2} \Big) \, . \end{aligned}$$

On obtient donc, compte tenu de l'injectivité de σ_k donnée par la proposition 6.8,

$$\operatorname{Ker} m_{k-2} \cap \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m^{i}_{k-2} = \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} m^{i}_{k-2} \, ,$$

ce qui prouve l'assertion (12.4.1). □

On a une assertion analogue dans la situation du théorème 11.1 avec les m'^{i}_{k-2} à la place des m^{i}_{k-2}. Ces assertions n'ont sans doute pas grand intérêt si ce n'est de montrer que, quand on prend les sections par les hyperplans d'un pinceau générique, il y a un lien entre la topologie de la section générique et celle des sections exceptionnelles. Il faudrait rechercher d'autres relations, plus significatives que (12.4.1).

(12.5) *Homotopie au lieu d'homologie.*

Il serait bon d'avoir un analogue homotopique des théorèmes 1.3 et 11.1. On en déduirait en particulier la version homotopique du théorème 1.1, c'est-à-dire qu'on aurait une démonstration directe du corollaire 1.2 valable sans restriction sur la codimension q.

Un premier pas dans cette direction est fait dans [Ch1]. On y met en effet en place le même cadre géométrique qu'au § 3 ci-dessus pour démontrer le théorème de Zariski dont nous avons parlé dans l'introduction et qui porte, lui, sur le groupe fondamental. Au moment crucial de la réintroduction des hyperplans mauvais, le rôle joué ici par l'isomorphisme de Leray est rempli par la possibilité de faire glisser jusque dans la transformée totale de l'axe de petits lacets entourant les hyperplans mauvais (cf. [Ch1] lemme (4.2.3)). Il s'agirait donc, pour atteindre notre objectif, de généraliser cette façon de faire à des cellules de dimension supérieure.

(12.6) *Variétés quasi-projectives avec singularités.*

On peut se poser la question de ce qu'il en est du théorème 11.1 lorsqu'on ne suppose plus $X\backslash A$ lisse. C'est sans doute dans le cadre homotopique évoqué en (12.5) que cette généralisation peut se faire. Elle serait assortie de restrictions concernant les singularités de l'espace ambiant X exprimées en termes d'obstacles au glissement de cellules le long des hyperplans mauvais. La mesure, de ce point de vue, de l'importance des singularités de X serait peut-être reliée à la profondeur homotopique rectifiée grâce au théorème 4.1.1 de [H-L4].

(12.7) *Théorèmes locaux.*

On doit pouvoir obtenir, avec les méthodes utilisées dans cet article, des analogues des théorèmes 1.3 et 11.1 pour le complémentaire d'un ensemble analytique fermé ou pour la différence de deux ensembles analytiques fermés passant par l'origine dans un voisinage suffisamment petit de l'origine dans $\mathbf{C}^n$. Il conviendra, dans ce cas, de prendre pour axe du pinceau un $(n-2)$-plan affine ne passant pas par l'origine mais légèrement à côté, à la manière des «théorèmes locaux forts» de Hamm et Lê (cf. [H-L1], [H-L3] et [H-L4]). La difficulté, pour avoir une proposition de fibration, consistera à pouvoir disposer d'une projection propre en se plaçant dans un voisinage fermé de l'origine dont le bord soit convenablement adapté aux ensembles analytiques considérés. Pour pouvoir ensuite en déduire des analogues des théorèmes 1.1 et 11.2, il faudra aussi prendre garde de conserver des conditions d'incidence que nous avons ici déduites de propriétés globales de l'espace projectif (notamment dans le point (ii) du lemme 9.2). Enfin, l'utilisation d'un pinceau d'axe ne passant pas par l'origine donnera une situation qui n'est pas purement locale mais seulement semi-locale qu'il faudra donc traiter soigneusement.

ANNEXE

Isomorphisme de Wang et isomorphisme de Leray

Dans cette annexe, nous donnons une justification sommaire de l'existence et des propriétés des isomorphismes de Wang et de Leray que nous avons utilisés aux §§4 et 5.

1°. Isomorphisme de Wang

Hsien-Chung Wang a donné pour tout fibré localement trivial sur une q-sphère des isomorphismes reliant l'homologie relative de l'espace total modulo une fibre à l'homologie de cette fibre (cf. [Wg]). Nous nous contenterons ici du cas particulier $q = 1$. Soit donc

$$\pi : E \to C$$

un fibré localement trivial topologique sur un cercle. Soit $c \in C$ et posons

$$E_c = \pi^{-1}(c) .$$

Fixons une orientation de C. On a alors, pour tout k, l'*isomorphisme de Wang*

(A.1) $$\nu_{E,k} : H_{k-1}(E_c) \xrightarrow{\sim} H_k(E, E_c)$$

associé à cette orientation de C et portant sur les groupes d'homologie singulière à coefficients entiers, avec la convention $H_{k-1}(E_c) = 0$ pour $k < 1$. Nous allons indiquer comment on peut définir $\nu_{E,k}$ mais en même temps nous montrerons que l'isomorphisme de Wang se comporte naturellement par rapport aux *sous-fibrés* (au sens que nous avons précisé à la fin du §3), c'est-à-dire que, si E' est un sous-fibré de E avec E'_c comme fibre au-dessus de c, l'isomorphisme $\nu_{E',K}$ le concernant (pour la même orientation de C) fait commuter le diagramme

(A.2) $$\begin{tikzcd} H_{k-1}(E_c) \arrow[r, "\nu_{E,k}", "\sim"'] & H_k(E, E_c) \\ H_{k-1}(E'_c) \arrow[u] \arrow[r, "\nu_{E',k}", "\sim"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & H_k(E', E'_c) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par inclusion.

Ce que nous allons faire ressemble à [La] 6.4 et correspond d'autre part à la description informelle que nous avons donnée au §4 (cf. fig. 4.1). Soit $\omega : [0, 1] \to C$ un lacet basé en c et dont la classe d'homotopie engendre $\pi_1(C, c)$. L'espace topologique E peut être obtenu à partir de $E_c \times [0, 1]$ en recollant $E_c \times \{1\}$ à $E_c \times \{0\}$ au moyen d'un homéomorphisme caractéristique. Plus précisément, si ω^* est un lacet simple de C homotope à ω, on peut, en