

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE
Autor: Ghys, Etienne
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58729>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE

par Etienne GHYS

1. INTRODUCTION

Soit B^{n+1} la boule unité fermée dans \mathbf{R}^{n+1} ($n \geq 1$) et S^n la sphère unité. Soit $\text{Diff}_0^k(S^n)$ et $\text{Diff}_0^k(B^{n+1})$ les groupes des difféomorphismes de classe C^k de S^n et B^{n+1} respectivement qui sont C^k -isotopes à l'identité ($0 \leq k \leq \infty$). Par restriction au bord, on a un morphisme de groupes:

$$\rho: \text{Diff}_0^k(B^{n+1}) \rightarrow \text{Diff}_0^k(S^n).$$

Il est bien connu que ρ est surjectif. En effet, soit f un élément de $\text{Diff}_0^k(S^n)$ et $f_t (t \in [0, 1])$ une C^k -isotopie entre $f_0 = \text{id}$ et $f_1 = f$. On peut bien sûr supposer que $f_t = \text{id}$ pour t assez petit de sorte que l'application définie par:

$$\begin{aligned} F: B^{n+1} &\rightarrow B^{n+1} \\ F(x) &= \|x\| \cdot f_{\|x\|} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \quad \text{pour } x \neq 0, \\ F(0) &= 0, \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de classe C^k , isotope à l'identité, dont la restriction au bord de B^{n+1} coïncide avec f .

Dans le cas des homéomorphismes, c'est-à-dire lorsque $k = 0$, le morphisme ρ admet une section évidente. Le prolongement radial d'un homéomorphisme f de la sphère S^n est l'homéomorphisme $\sigma(f)$ de B^{n+1} défini par:

$$\begin{aligned} \sigma(f)(x) &= \|x\| \cdot f \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \quad \text{pour } x \neq 0, \\ \sigma(f)(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ce prolongement σ définit un morphisme de groupes qui est une section de ρ . Bien sûr $\sigma(f)$ n'est généralement pas différentiable en 0 même si f est de classe C^∞ . Le but de cette note est de montrer que cette difficulté ne peut pas être évitée lorsque $k \geq 1$.

THÉOREME. *Il n'existe aucun morphisme de groupes σ de $\text{Diff}_0^\infty(S^n)$ vers $\text{Diff}_0^1(B^{n+1})$ tel que, pour tout f de $\text{Diff}_0^\infty(S^n)$, le difféomorphisme $\sigma(f)$ soit un prolongement de f à la boule.*

Insistons sur le fait que dans l'énoncé du théorème on ne suppose pas que le morphisme σ est continu; il s'agit *a priori* d'un morphisme de groupes abstraits.

Voici un exemple d'une situation contraire. Considérons le cercle comme bord de la bande de Moebius M . Il se trouve que, dans ce cas, il existe un morphisme σ de $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ vers le groupe $\text{Diff}_0^\infty(M)$ des difféomorphismes de classe C^∞ de M isotopes à l'identité tel que, pour tout f de $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$, le difféomorphisme $\sigma(f)$ prolonge f à la bande M . Pour cela, on considère le disque unité ouvert $\overset{\circ}{B}^2$ de \mathbf{R}^2 comme plongé dans le plan projectif réel P^2 . Le complémentaire de $\overset{\circ}{B}^2$ dans P^2 est une bande de Moebius M dont le bord est le cercle unité S^1 . Deux points de S^1 , éventuellement confondus, définissent deux tangentes dans P^2 qui se coupent en un point de M . Réciproquement, par un point de M passent deux tangentes à S^1 (confondues si le point considéré est sur S^1). Ainsi M s'identifie à l'espace des paires de points (éventuellement confondus) sur un cercle et le bord de M correspond aux paires de points confondus. Il est maintenant clair qu'un difféomorphisme f du cercle S^1 définit naturellement un difféomorphisme $\sigma(f)$ de M qui prolonge f à la bande M .

La démonstration du théorème lorsque $n = 1$ est élémentaire et va servir de modèle pour le cas général. Nous avons cru utile de détailler d'abord ce cas particulier au paragraphe 2. Une lecture sommaire de cette note pourrait d'ailleurs se limiter à ce paragraphe. On étudie alors le cas où n est un entier impair quelconque au paragraphe 3 puis le cas où n est pair au paragraphe 4. Le paragraphe 5 est consacré à des remarques générales inspirées par le théorème.

2. LE CAS $n = 1$

Nous commencerons par un lemme élémentaire. La démonstration que nous en proposons est rapide mais elle utilise des outils puissants d'analyse. Il est possible par ailleurs d'en donner une démonstration topologique (voir [4]).

LEMME 2.1. Soit f un difféomorphisme de classe C^1 du disque B^2 qui est d'ordre fini et respecte l'orientation. Alors f est C^1 -conjugué à une rotation euclidienne du disque B^2 .

Démonstration. Par moyennisation, on construit une métrique riemannienne sur B^2 invariante par f . Le disque B^2 muni de cette métrique est conformément équivalent au disque unité de \mathbf{C} . Ceci résulte d'une part de l'existence de coordonnées isothermes sur les surfaces et d'autre part du théorème d'uniformisation de Riemann. Le lemme est alors une conséquence de la classification des difféomorphismes holomorphes du disque unité. \square

Le groupe $G = PSL(2, \mathbf{R})$ opère par difféomorphismes projectifs sur la droite projective réelle P^1 , difféomorphe au cercle S^1 . Soit G_∞ le revêtement universel de G qui est aussi le groupe des relevés des éléments de G au revêtement universel de P^1 , difféomorphe à la droite \mathbf{R} . On a une extension centrale:

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow G_\infty \rightarrow G \rightarrow 1 .$$

Le sous-groupe \mathbf{Z} de G_∞ correspond aux relevés de l'identité, c'est-à-dire aux translations d'amplitudes entières de la droite.

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et G_p le revêtement à p feuillets de G , constitué des relevés des éléments de G au revêtement à p feuillets de $P^1 \simeq S^1$, lui aussi difféomorphe à S^1 . On a ainsi un plongement:

$$i: G_p \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(S^1) .$$

Le groupe G_p est une extension centrale:

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow G_p \rightarrow G \rightarrow 1 .$$

C'est aussi le quotient de G_∞ par le sous-groupe central $p\mathbf{Z}$.

Le lemme suivant est apparenté à la non trivialité de l'extension de G par \mathbf{Z} définissant G_∞ , soulignée pour la première fois par J. Milnor [5]. La preuve que nous en proposons est inspirée de [1].

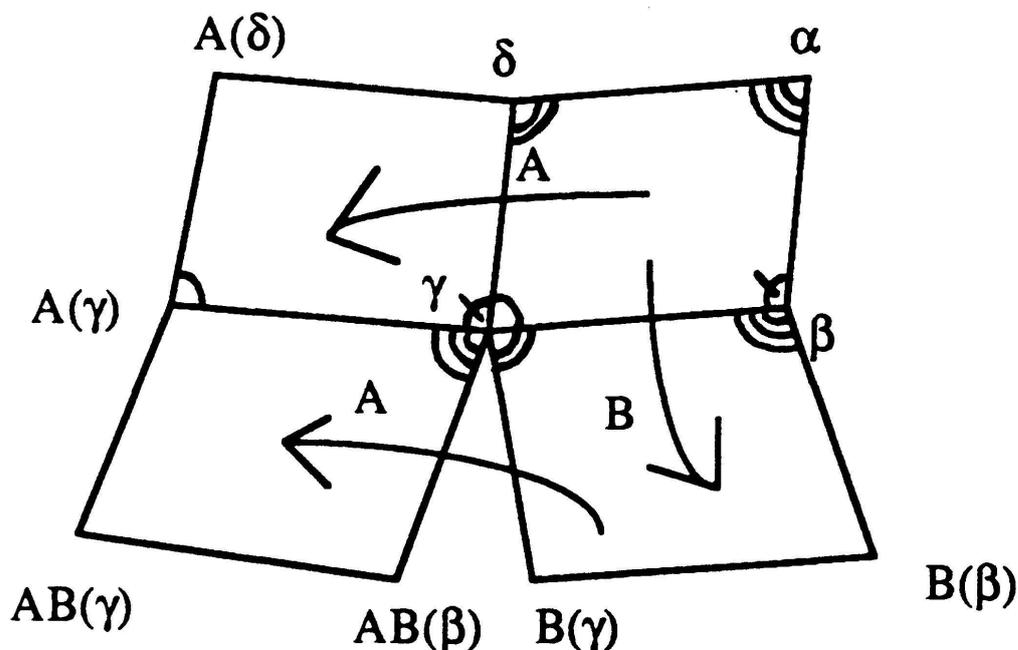
LEMME 2.2. Le sous-groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ de G_p est contenu dans le groupe des commutateurs de G_p .

Démonstration. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre points du disque de Poincaré D^2 dont les distances mutuelles vérifient

$$d(\alpha, \beta) = d(\gamma, \delta) \quad \text{et} \quad d(\alpha, \delta) = d(\beta, \gamma) .$$

Soit A l'isométrie directe du disque de Poincaré qui envoie α et β sur δ et γ et B celle qui envoie α et δ sur β et γ . Le commutateur $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$

fixe le point γ ; c'est donc une rotation de centre γ . Ce commutateur envoie le segment joignant γ à $B(\gamma) = BA(\beta)$ sur le segment joignant γ à $AB(\beta)$. La figure suivante montre que l'angle entre ces deux segments est la somme des angles intérieurs du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$.



D'après une propriété bien connue de géométrie hyperbolique, cette somme est égale au complément à 2π de l'aire du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$. Si l'on choisit convenablement l'orientation de ce quadrilatère, l'angle de la rotation $[A, B]$ est égal à l'aire de $\alpha\beta\gamma\delta$ et il peut donc prendre toutes les valeurs strictement inférieures à 2π lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ varient dans D^2 . Rappelons que G s'interprète comme groupe des isométries directes du disque de Poincaré D^2 ; l'action sur P^1 que nous étudions apparaissant comme action sur le bord de D^2 . Une rotation de D^2 correspond, sur $P^1 \simeq S^1$, à une transformation projective conjuguée à une rotation euclidienne du cercle S^1 de même angle. On constate donc qu'il est possible de construire deux courbes de classe C^∞

$$t \in [0, 2\pi[\mapsto A_t \in G,$$

$$t \in [0, 2\pi[\mapsto B_t \in G,$$

avec $A_0 = B_0 = \text{id}$ et telles que $[A_t, B_t]$ soit la rotation d'angle t .

Ces courbes se relèvent dans G_∞ en des courbes \tilde{A}_t et \tilde{B}_t avec $\tilde{A}_0 = \text{id} = \tilde{B}_0$ et il est clair que l'élément $[\tilde{A}_\pi, \tilde{B}_\pi]^2$ est l'élément 1 du sous-groupe \mathbf{Z} de G_∞ . En passant au quotient par $p\mathbf{Z}$, nous avons ainsi exprimé le générateur 1 de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ dans G_p comme un produit de deux commutateurs. \square

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^1) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^2)$$

qui prolonge les difféomorphismes du cercle au disque. Notons u l'élément 1 de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ engendrant le centre de G_p . Le difféomorphisme $\sigma(i(u))$ de B^2 est d'ordre p . Il est conjugué à une rotation d'ordre p d'après 2.1 et fixe donc un unique point x_0 de B^2 .

Puisque u est central dans G_p , tous les éléments de $\sigma(G_p)$ fixent x_0 . Par passage à la différentielle en x_0 , on construit donc un morphisme

$$D: G_p \rightarrow GL(T_{x_0}B^2) \simeq GL(2, \mathbf{R}).$$

A conjugaison près, on peut supposer que $D(u)$ est une rotation d'ordre p .

LEMME 2.3. *Si $p \geq 3$, le centralisateur d'une rotation d'ordre p dans $GL(2, \mathbf{R})$ est abélien.*

Démonstration. Ce centralisateur coïncide en effet avec le groupe de similitudes de \mathbf{R}^2 . \square

La démonstration du théorème lorsque $n = 1$ est maintenant facile. Le morphisme D , étant à valeurs dans le centralisateur de $D(u)$, a une image abélienne. Il en résulte que D est trivial sur le groupe des commutateurs de G_p et donc sur u d'après 2.2. Mais ceci est absurde puisque $D(u)$ est conjugué à une rotation d'ordre p .

On remarquera que nous n'avons utilisé l'hypothèse sur σ que pour pouvoir affirmer que l'ordre de $\sigma(i(u))$ est exactement p . Nous avons donc montré en fait un résultat plus fort: le groupe G_p et, *a fortiori*, $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$, ne se plongent pas dans $\text{Diff}_0^1(B^2)$. Si l'on tient compte du résultat (difficile) selon lequel $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ est un groupe simple [7], et donc qu'un morphisme de source $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ est injectif ou trivial, on déduit:

THÉORÈME. *Il n'existe aucun morphisme non trivial de $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ vers $\text{Diff}_0^1(B^2)$.*

3. LE CAS DES SPHÈRES IMPAIRES

Si n s'écrit sous la forme $2k - 1$, nous identifierons la sphère S^n avec l'ensemble des points (z_1, \dots, z_k) de \mathbf{C}^k tels que $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$. Soit p

un nombre premier. Nous noterons C_p le sous-groupe de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1})$ formé des difféomorphismes du type

$$f: (z_1, \dots, z_k) \in S^{2k-1} \mapsto (w_1 z_1, \dots, w_k z_k) \in S^{2k-1},$$

où w_1, \dots, w_k sont des racines p -èmes de l'unité. Bien sûr, C_p est un groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^k$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^{2k})$$

qui prolonge les difféomorphismes de la sphère à la boule.

LEMME 3.1. *Il existe un unique point x_0 intérieur à B^{2k} qui est fixe par $\sigma(C_p)$.*

Démonstration. Rappelons d'abord qu'un difféomorphisme périodique de période p est localement linéarisable au voisinage d'un point fixe (voir par exemple [2]). Il en résulte que l'ensemble des points fixes d'un tel difféomorphisme est une sous-variété. Lorsque la variété ambiante est la sphère S^n , la sous-variété des points fixes, si elle n'est pas vide, a la même homologie modulo p qu'une sphère de dimension d avec $0 \leq d \leq n$. C'est un exemple classique d'application de la théorie de Smith: voir par exemple [2].

Soit f un élément de C_p tel qu'aucun des w_i qui lui correspondent ne soit égal à 1. Ainsi, f n'a pas de point fixe sur S^{2k-1} . Le difféomorphisme $\sigma(f)$ de B^{2k} a bien sûr au moins un point fixe intérieur à B^{2k} . En collant deux copies du difféomorphisme $\sigma(f)$ de B^{2k} le long du bord S^{2k-1} , on obtient un difféomorphisme F de S^{2k} , double de $\sigma(f)$. Ce difféomorphisme F est d'ordre p , sans point fixe sur S^{2k-1} et possède au moins un point fixe dans chacun des deux hémisphères bordés par S^{2k-1} . L'ensemble de ses points fixes n'est donc pas connexe. Il résulte du rappel que nous venons de faire que l'ensemble des points fixes de F a l'homologie modulo p d'une sphère de dimension 0 et que c'est en fait une sphère de dimension 0, c'est-à-dire un ensemble à deux éléments! Autrement dit, $\sigma(f)$ a un unique point fixe x_0 dans B^{2k} .

Le lemme est alors une conséquence de la commutativité de C_p et du fait que les f pour lesquels aucun w_i n'est égal à 1 engendrent C_p . \square

Considérons la différentielle de $\sigma(C_p)$ en x_0 . On obtient ainsi un morphisme

$$D: C_p \rightarrow GL(T_{x_0} B^{2k}) \simeq GL(2k, \mathbf{R}).$$

LEMME 3.2. *A conjugaison près, on peut supposer que l'image par D de C_p coïncide avec le sous-groupe $\overline{C_p}$ formé des applications linéaires de $\mathbf{R}^{2k} \simeq \mathbf{C}^k$ du type*

$$(z_1, \dots, z_k) \in \mathbf{C}^k \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k) \in \mathbf{C}^k,$$

avec μ_i racine p -ème de l'unité.

Démonstration. Le fait que $D(C_p)$ soit, à conjugaison près, contenu dans $\overline{C_p}$ résulte de la classification des sous-groupes finis commutatifs de $GL(2k, \mathbf{R})$ dont tous les éléments sont d'ordre p . Nous avons déjà rappelé qu'un difféomorphisme d'ordre fini est localement conjugué à sa différentielle au voisinage d'un point fixe. Il en résulte qu'un difféomorphisme d'ordre fini d'une variété connexe ne peut avoir une différentielle égale à l'identité en un point fixe à moins que ce difféomorphisme ne soit l'identité. En d'autres termes, D est injective et on a donc $D(C_p) = \overline{C_p}$ (à conjugaison près). \square

Remarquons que nous n'affirmons pas que si $f \in C_p$ est défini par (w_1, \dots, w_k) , alors le k -uplet (μ_1, \dots, μ_k) qui définit $D(f)$ coïncide avec (w_1, \dots, w_k) .

On choisit $p > k$ et f un élément de C_p tels que $D(f)$ soit une application linéaire du type:

$$(z_1, \dots, z_k) \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k),$$

où les μ_i sont distincts deux à deux et différents de 1. Ceci implique que x_0 est un point fixe isolé de $\sigma(f)$ et les considérations du lemme 3.1 entraînent que x_0 est le seul point fixe de $\sigma(f)$.

LEMME 3.3. *Le centralisateur Z de $D(f)$ dans $GL(2k, \mathbf{R})$ est abélien.*

Démonstration. Tout élément de Z est diagonal, car il préserve les directions propres de $D(f)$. \square

Soit $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f)$ le groupe des difféomorphismes de S^{2k-1} de classe C^∞ commutant avec f et isotopes à l'identité par une isotopie commutant avec f . Le groupe $\sigma \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f) \subset \text{Diff}_0^1(B^{n+1})$ fixe évidemment x_0 et la différentielle en x_0 est dans Z . On a donc un morphisme

$$D: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f) \rightarrow Z$$

qui envoie f sur un élément non trivial.

La contradiction cherchée est dans le lemme suivant, analogue au lemme 2.2. Il ne serait pas difficile de déduire ce lemme d'un théorème profond

de W. Thurston sur la simplicité de certains groupes de difféomorphismes. Il nous semble cependant intéressant de démontrer le lemme de manière complètement explicite.

LEMME 3.4. *L'élément f appartient au groupe des commutateurs de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f)$.*

Démonstration. Soit w_1, \dots, w_k les racines de l'unité telles que

$$f(z_1, \dots, z_k) = (w_1 z_1, \dots, w_k z_k)$$

Puisque $\sigma(f)$ ne fixe que le point x_0 dans B^{n+1} , le difféomorphisme f n'a pas de point fixe dans S^n c'est-à-dire que les w_i sont tous différents de 1. Fixons des entiers non nuls n_1, \dots, n_k tels que:

$$w_j = \exp(2i\pi n_j/p) \quad j = 1, \dots, k.$$

Soit ϕ_t le flot périodique ($\phi_1 = \text{id}$) défini sur S^{2k-1} par:

$$\phi_t(z_1, \dots, z_k) = (\exp(2i\pi n_1 t)z_1, \dots, \exp(2i\pi n_k t)z_k).$$

On a $f = \phi_{1/p}$.

Soit N le plus petit multiple commun de p, n_1, \dots, n_k . Ainsi $1/p$ et toutes les périodes des orbites périodiques de ϕ_t sont des multiples entiers de $1/N$.

Comme pour tout flot périodique sans point fixe, on peut recouvrir S^{2k-1} par un nombre fini d'ouverts U_j «trivialisants» pour le fibré de Seifert associé. Plus précisément, U_j est difféomorphe au quotient de $\mathring{B}^{2k-2} \times S^1$ par un difféomorphisme périodique du type

$$(u_1, \dots, u_{k-1}, \theta) \in \mathring{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (\alpha_1 u_1, \dots, \alpha_{k-1} u_{k-1}, w\theta) \in \mathring{B}^{2k-2} \times S^1$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, w$ sont des racines N -èmes de l'unité. Dans ces coordonnées, le flot ϕ_t se relève à $\mathring{B}^{2k-2} \times S^1$ par

$$\bar{\phi}_t(u_1, \dots, u_{k-1}, \theta) = (u_1, \dots, u_{k-1}, \exp(2i\pi t)\theta).$$

Rappelons que nous avons construit au paragraphe précédent des courbes A_t et B_t dans $G = \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ (avec $t \in [0, 2\pi[$) et leurs relevés \tilde{A}_t et \tilde{B}_t dans G_∞ . Notons \bar{A}_t et \bar{B}_t les projections de \tilde{A}_t et \tilde{B}_t dans G_N . Les éléments \bar{A}_t et \bar{B}_t peuvent être considérés comme des difféomorphismes du cercle S^1 commutant avec la rotation d'angle $2\pi/N$. De plus, $[\bar{A}_t, \bar{B}_t]$ est une rotation d'angle t/N .

Soit $\tau_j: S^{2k-1} \rightarrow [0, 2\pi[$ une fonction de classe C^∞ à support compact dans U_j et invariante par ϕ_t . On note aussi $\tau_j: \mathring{B}^{2k-2} \times S^1 \rightarrow [0, 2\pi[$ la fonction

obtenue en composant la projection de $\check{B}^{2k-2} \times S^1$ sur U_j et τ_j . On remarquera que $\tau_j(x, \theta)$ ne dépend pas de θ car τ_j est invariant par ϕ_t . Les applications

$$(x, \theta) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (x, \bar{A}_{\tau_j(x)}(\theta)) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1$$

$$(x, \theta) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (x, \bar{B}_{\tau_j(x)}(\theta)) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1$$

passent au quotient en des difféomorphismes de U_j à supports compacts. En prolongeant ces difféomorphismes par l'identité en dehors de U_j , on obtient des difféomorphismes \bar{A}_{τ_j} et \bar{B}_{τ_j} de S^{2k-1} qui commutent évidemment avec f . Par ailleurs,

$$[\bar{A}_{\tau_j}, \bar{B}_{\tau_j}](m) = \phi_{\tau_j(m)/N}(m).$$

Le difféomorphisme f coïncide avec $\phi_{1/p}$. Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit donc d'écrire la fonction constante N/p comme somme de fonctions τ_j du type précédent:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{N} \tau_1 + \dots + \frac{1}{N} \tau_q.$$

En effet, on aura alors

$$f = \phi_{1/p} = [\bar{A}_{\tau_1}, \bar{B}_{\tau_1}] \dots [\bar{A}_{\tau_q}, \bar{B}_{\tau_q}].$$

Pour cela, il suffit d'utiliser une partition de l'unité subordonnée aux U_j et d'en prendre la moyenne sous l'action de S^1 associée à ϕ_t pour la rendre invariante. \square

4. LE CAS DES SPHÈRES PAIRES

Nous identifierons la sphère S^{2k} à l'ensemble des points (z_1, \dots, z_k, t) de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$ tels que $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 + t^2 = 1$. Comme précédemment, nous fixons un nombre premier p et nous considérons le groupe C_p des difféomorphismes de S^{2k} , isotopes à l'identité, du type:

$$f: (z_1, \dots, z_k, t) \in S^{2k} \mapsto (w_1 z_1, \dots, w_k z_k, t) \in S^{2k},$$

où les w_i sont des racines p -èmes de l'unité.

Supposons encore par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k}) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^{2k+1})$$

qui prolonge les difféomorphismes de la sphère à la boule.

LEMME 4.1. *Il existe un unique arc I dans B^{2k+1} connectant les points $N = (0, \dots, 0, 1)$ et $S = (0, \dots, 0, -1)$ et formé de points fixes par tous les éléments de σC_p . Cet arc ne dépend pas de p .*

Démonstration. Comme précédemment, si aucun des w_i n'est égal à 1, le difféomorphisme f a exactement deux points fixes sur la sphère S^{2k} (les points N et S). La théorie de Smith permet alors de montrer que l'ensemble des points fixes de $\sigma(f)$ est un arc connectant N et S . Un homéomorphisme d'ordre fini d'un intervalle qui fixe les extrémités est nécessairement l'identité. Il résulte de ce fait, de la commutativité de C_p et du fait que les f pour lesquels aucun w_i n'est égal à 1 engendrent C_p qu'il existe un arc I formé de points fixes par tous les éléments de σC_p .

Puisque C_p et C_q commutent (si p et q sont deux nombres premiers quelconques), l'arc I ne dépend pas du choix de p . \square

Soit x_0 un point de I . Considérons la différentielle de $\sigma(C_p)$ en x_0 . On obtient ainsi un morphisme

$$D: C_p \rightarrow GL(T_{x_0} B^{2k+1}) \simeq GL(2k+1, \mathbf{R}).$$

LEMME 4.2. *A conjugaison près, on peut supposer que l'image de D coïncide avec le groupe $\overline{C_p}$ des applications linéaires de $\mathbf{R}^{2k+1} \simeq \mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$ du type:*

$$(z_1, \dots, z_k, t) \in \mathbf{C}^k \times \mathbf{R} \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k, t) \in \mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$$

où les μ_j sont des racines p -èmes de l'unité.

Démonstration. Identique à celle de 3.2. \square

On choisit $p > n$ et f un élément de C_p tels que $D(f)$ soit une application linéaire du type précédent pour laquelle les μ_j sont distincts deux à deux et différents de 1. D'après ce que nous avons vu, l'ensemble des points fixes de $\sigma(f)$ coïncide alors avec I .

La démonstration se sépare ici de celle décrite au paragraphe précédent. En effet, l'élément f n'est certainement pas un produit de commutateurs dans le groupe $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, f)$ des difféomorphismes de classe C^∞ , isotopes à l'identité et commutant avec f . Ceci résulte du fait que la différentielle d'un élément de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, f)$ au point N est diagonale de sorte qu'un produit de commutateurs a une différentielle égale à l'identité en N , contrairement à f . C'est précisément ce fait qui a servi de base à la démonstration du théorème

lorsque n est impair et qui nous empêche donc de généraliser la preuve au cas où n est pair.

Soit $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ le groupe des difféomorphismes de S^{2k} , coïncidant avec l'identité au voisinage de N et S et isotopes à l'identité par une isotopie à support compact dans $S^{2k} - \{N, S\}$. Notre premier but sera de montrer que $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ fixe I point par point. Nous en déduirons l'existence d'un point x_0 de I fixe par tout le groupe $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k})$ et il sera facile d'en déduire une contradiction.

On se fixe deux nombres premiers distincts p et q et deux éléments f_1 et f_2 de C_p et C_q respectivement, du type précédent. Soit $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ le sous-groupe de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ formé des éléments commutant avec f_i et isotopes à l'identité par une isotopie commutant avec f_i ($i = 1, 2$).

LEMME 4.3. *Les groupes $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ ($i = 1, 2$) fixent I point par point. De plus, les différentielles de ces difféomorphismes aux points de I sont égales à l'identité.*

Démonstration. Ce groupe préserve globalement l'ensemble des points fixes de $\sigma(f_i)$, c'est-à-dire I . L'action de f_i sur $S^{2k} - \{N, S\}$ est libre. Un difféomorphisme de $V_i = S^{2k} - \{N, S\}/(f_i)$ qui est l'identité au voisinage des deux bouts, et qui est isotope à l'identité par une isotopie à support compact, se relève de manière unique en un élément de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$. En d'autres termes, $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ est isomorphe au groupe $\text{Diff}_{c,0}^\infty(V_i)$ des difféomorphismes de V_i de classe C^∞ , à supports compacts, isotopes à l'identité par une isotopie à support compact. On a donc un morphisme

$$\text{Diff}_{c,0}^\infty(V_i) \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(I) .$$

Il s'agit de montrer que ce morphisme est trivial.

Un théorème de W. Thurston [7] affirme que $\text{Diff}_{c,0}^\infty(V_i)$ est un groupe simple. Il nous suffit donc de trouver un élément non trivial de $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ qui fixe I point par point pour en conclure qu'il en est de même pour tous les éléments.

Soit ϕ un élément de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ qui ne commute pas avec f_j ($j \in \{1, 2\}$ et $j \neq i$). Puisque $\sigma(\phi)$ préserve globalement I et que $\sigma(f_j)$ fixe I point par point, le commutateur $\sigma(\phi f_j \phi^{-1} f_j^{-1})$ fixe I point par point. Il suffit alors de remarquer que $\phi f_j \phi^{-1} f_j^{-1}$ coïncide avec l'identité au voisinage de N, S , commute avec f_i , est isotope à l'identité par une isotopie commutant avec f_i et à support dans $S^{2k} - \{N, S\}$. Nous avons ainsi trouvé un élément non trivial dans le noyau du morphisme considéré et ce morphisme est donc bien trivial.

En fixant un point x_0 de I et en considérant la différentielle en x_0 d'un élément de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$, on obtient un morphisme d'un groupe simple à valeurs dans le groupe abélien Z , centralisateur de $D(f_i)$ dans $GL(2k+1, \mathbf{R})$. Ces différentielles sont donc toutes égales à l'identité. \square

LEMME 4.4. *Le groupe $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ est engendré par les deux sous-groupes $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ ($i = 1, 2$). Ainsi, les éléments de $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ fixent I point par point et leurs différentielles sont égales à l'identité en ces points.*

Démonstration. Je remercie C. Bavard à qui je dois cette démonstration.

Soit ϕ un difféomorphisme d'ordre pq d'une variété M . On suppose que l'action associée de $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ sur M est libre. Soit $U \subset M$ un ouvert tel que les $\phi^i(U)$ soient disjoints deux à deux (où l'exposant i est à lire dans $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$). Si $g_0, g_1, \dots, g_{pq-1}$ sont pq difféomorphismes de M à supports dans U , on notera $\{g_0, g_1, \dots, g_{pq-1}\}$ le difféomorphisme suivant de M :

$$g_0 \circ (\phi^{-1} \circ g_1 \circ \phi^1) \circ (\phi^{-2} \circ g_2 \circ \phi^2) \circ \dots \circ (\phi^{-(pq-1)} \circ g_{pq-1} \circ \phi^{(pq-1)}) .$$

On remarquera que tous les facteurs de cette composition commutent. Fixons deux difféomorphismes g et h de M à supports dans U et définissons $6pq$ difféomorphismes a_j^i et b_j^i ($1 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq pq-1$) par:

$$\begin{array}{llll} a_j^1 = g & a_j^2 = \text{id} & a_j^3 = h^{-1} & \text{si } j \equiv 0 \pmod{p} \\ a_j^1 = h^{-1} & a_j^2 = g & a_j^3 = \text{id} & \text{si } j \not\equiv 0 \pmod{p} \\ b_j^1 = h & b_j^2 = g^{-1} & b_j^3 = \text{id} & \text{si } j \equiv 0 \pmod{q} \\ b_j^1 = g^{-1} & b_j^2 = \text{id} & b_j^3 = h & \text{si } j \not\equiv 0 \pmod{q} . \end{array}$$

On pose alors, pour $i = 1, 2, 3$,

$$A_i = \{a_0^i, \dots, a_{pq-1}^i\} \quad \text{et} \quad B_i = \{b_0^i, \dots, b_{pq-1}^i\} .$$

On remarque que les trois difféomorphismes A_i commutent avec ϕ^p alors que les B_i commutent avec ϕ^q .

Une vérification simple (que le lecteur pourra faire d'abord lorsque $p = 2$ et $q = 3$) montre que

$$A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 = g h g^{-1} h^{-1} .$$

Ainsi, nous avons montré que le commutateur de deux difféomorphismes à supports dans U est un produit de difféomorphismes de M commutant avec ϕ^p ou ϕ^q .

Appliquons cette technique à la situation du lemme. Dans ce cas, l'action de $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ considérée est engendrée par f_1 et f_2 d'ordres respectifs p et q , agissant sur $S^{2k} - \{N, S\}$. Nous obtenons que si g et h sont deux difféomorphismes de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ à supports dans un ouvert U assez petit de $S^{2k} - \{N, S\}$, le commutateur $[g, h]$ appartient au groupe engendré par les sous-groupes $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ ($i = 1, 2$). Pour conclure, il suffit de remarquer que ces commutateurs engendrent $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$. Ceci résulte de deux faits. Tout d'abord, si les ouverts U_j recouvrent $S^{2k} - \{N, S\}$, les groupes $\text{Diff}_{0,c}^\infty(U_j) \subset \text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ engendrent $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$; c'est le lemme de fragmentation de [6]. D'autre part, d'après le théorème de W. Thurston déjà mentionné, les groupes $\text{Diff}_{0,c}^\infty(U_i)$ sont des groupes simples et donc sont engendrés par les commutateurs. \square

Soit s l'involution isotope à l'identité définie par

$$s(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_k + iy_k, t) = (x_1 - iy_1, -x_2 - iy_2, \dots, -x_k - iy_k, -t).$$

Elle commute avec C_2 de sorte que $\sigma(s)$ préserve I globalement. De plus, s échange S et N et il existe donc un unique point x_0 de I qui est fixe par $\sigma(s)$. Soit W et E les points $(-1, 0, \dots, 0)$ et $(1, 0, \dots, 0)$ de S^{2k} . Il est clair que l'arc analogue à I joignant W à E , formé des points fixes de $\sigma(s)$, contient x_0 . Les deux groupes $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ et $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ fixent donc x_0 et leurs différentielles en x_0 sont triviales.

LEMME 4.5. *Les groupes $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ et $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ engendrent $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k})$.*

Démonstration. Soit f un élément de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k})$. Soit g_1 un élément de $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ qui coïncide avec f au voisinage des points N et S et posons $g_2 = g_1^{-1} \circ f$. On a alors $g_2 \in \text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ et $f = g_1 \circ g_2$. \square

La contradiction cherchée est maintenant claire. Le groupe $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k})$ tout entier fixe x_0 et sa différentielle en x_0 est triviale. Ceci est absurde puisque les éléments d'ordre fini distincts de l'identité (par exemple ceux de $\sigma(C_p)$) ne peuvent avoir une différentielle égale à l'identité en un point fixe. Ceci termine la preuve du théorème dans le cas où n est pair.

5. QUELQUES REMARQUES

Le résultat obtenu dans cette note suggère immédiatement une question plus générale. Si V est une variété à bord non vide ∂V , dans quelles

conditions existe-t-il un morphisme de $\text{Diff}_0^\infty(\partial V)$ vers $\text{Diff}_0^\infty(V)$ qui «prolonge les difféomorphismes à l'intérieur»? Nous avons vu qu'un tel morphisme existe si V est une bande de Moebius et n'existe pas si V est une boule. Le lecteur n'aura maintenant aucune difficulté à traiter le cas général où V est une surface compacte à bord. Qu'en est-il par contre si V est un corps à anses de genre g (i.e. le domaine de \mathbf{R}^3 bordé par une surface de genre g plongée de manière habituelle)?

De manière analogue, on peut s'intéresser aux morphismes entre groupes de difféomorphismes de variétés fermées (i.e. compactes sans bord). Voici deux exemples.

On peut identifier l'espace projectif complexe \mathbf{CP}^n au quotient de $(S^2)^n$ par l'action du groupe symétrique. Cette identification peut être obtenue de la façon suivante. Au point de coordonnées homogènes $[a_0 : a_1 : \dots : a_n]$ de \mathbf{CP}^n , on associe les n zéros du polynôme $a_0 z^n + \dots + a_n$ dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$ qui sont définis à l'ordre près. Il est facile de vérifier qu'un difféomorphisme de classe C^∞ de S^2 mène ainsi à un difféomorphisme de classe C^∞ de \mathbf{CP}^n et on a donc un morphisme naturel:

$$\text{Diff}_0^\infty(S^2) \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(\mathbf{CP}^n).$$

Une deuxième construction générale s'obtient de la façon suivante. Si V est une variété fermée et si PTV désigne le projectifié du fibré tangent à V , on a un morphisme obtenu par différentielle:

$$\text{Diff}_0^\infty(V) \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(PTV).$$

On notera que PTV est fermée. Ces exemples suggèrent la question qui suit:

QUESTION. *Soit V_1 et V_2 deux variétés fermées telles qu'il existe un morphisme non trivial de $\text{Diff}_0^\infty(V_1)$ vers $\text{Diff}_0^\infty(V_2)$. Peut-on affirmer que la dimension de V_1 est inférieure ou égale à celle de V_2 ?*

Les cas d'isomorphismes entre groupes de difféomorphismes ont été étudiés dans [3]: $\text{Diff}_0^\infty(V_1)$ et $\text{Diff}_0^\infty(V_2)$ ne sont isomorphes que si V_1 et V_2 sont difféomorphes.

Signalons enfin que les méthodes utilisées dans cet article tombent en défaut dans le contexte analytique réel (sauf lorsque $n = 1$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOTT, R. On some formulas for the characteristic classes of group actions. *Lecture notes in math.* 652 (1978), 25-61, Springer-Verlag.
- [2] BREDON, G. E. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, 1972.
- [3] FILIPKIEWICZ, R. P. Isomorphisms between diffeomorphism groups. *Ergod. Th. & Dyn. Sys.* 2 (1982), 159-171.
- [4] VON KERÉKJÁRTÓ, B. Über die periodischen Transformationen der Kreisschiebe und Kugelfläche. *Math. Annalen* 80 (1921), 36-38.
- [5] MILNOR, J. On the existence of a connection with curvature zero. *Comment. Math. Helv.* 32 (1958), 215-223.
- [6] PALIS, J. and S. SMALE. Structural stability theorems. *Proc. Symp. Pure Math. AMS.* vol. 14, 223-232.
- [7] THURSTON, W. Foliations and groups of diffeomorphisms. *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974), 304-307.

(Reçu le 28 septembre 1990)

Etienne Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
E.N.S. Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon, cedex 07 (France)

Vide-leer-empty