

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE
Autor: Ghys, Etienne
Kapitel: 1. Introduction
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58729>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE

par Etienne GHYS

1. INTRODUCTION

Soit B^{n+1} la boule unité fermée dans \mathbf{R}^{n+1} ($n \geq 1$) et S^n la sphère unité. Soit $\text{Diff}_0^k(S^n)$ et $\text{Diff}_0^k(B^{n+1})$ les groupes des difféomorphismes de classe C^k de S^n et B^{n+1} respectivement qui sont C^k -isotopes à l'identité ($0 \leq k \leq \infty$). Par restriction au bord, on a un morphisme de groupes:

$$\rho: \text{Diff}_0^k(B^{n+1}) \rightarrow \text{Diff}_0^k(S^n).$$

Il est bien connu que ρ est surjectif. En effet, soit f un élément de $\text{Diff}_0^k(S^n)$ et $f_t (t \in [0, 1])$ une C^k -isotopie entre $f_0 = \text{id}$ et $f_1 = f$. On peut bien sûr supposer que $f_t = \text{id}$ pour t assez petit de sorte que l'application définie par:

$$\begin{aligned} F: B^{n+1} &\rightarrow B^{n+1} \\ F(x) &= \|x\| \cdot f_{\|x\|} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \quad \text{pour } x \neq 0, \\ F(0) &= 0, \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de classe C^k , isotope à l'identité, dont la restriction au bord de B^{n+1} coïncide avec f .

Dans le cas des homéomorphismes, c'est-à-dire lorsque $k = 0$, le morphisme ρ admet une section évidente. Le prolongement radial d'un homéomorphisme f de la sphère S^n est l'homéomorphisme $\sigma(f)$ de B^{n+1} défini par:

$$\begin{aligned} \sigma(f)(x) &= \|x\| \cdot f \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \quad \text{pour } x \neq 0, \\ \sigma(f)(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ce prolongement σ définit un morphisme de groupes qui est une section de ρ . Bien sûr $\sigma(f)$ n'est généralement pas différentiable en 0 même si f est de classe C^∞ . Le but de cette note est de montrer que cette difficulté ne peut pas être évitée lorsque $k \geq 1$.

THÉOREME. *Il n'existe aucun morphisme de groupes σ de $\text{Diff}_0^\infty(S^n)$ vers $\text{Diff}_0^1(B^{n+1})$ tel que, pour tout f de $\text{Diff}_0^\infty(S^n)$, le difféomorphisme $\sigma(f)$ soit un prolongement de f à la boule.*

Insistons sur le fait que dans l'énoncé du théorème on ne suppose pas que le morphisme σ est continu; il s'agit *a priori* d'un morphisme de groupes abstraits.

Voici un exemple d'une situation contraire. Considérons le cercle comme bord de la bande de Moebius M . Il se trouve que, dans ce cas, il existe un morphisme σ de $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ vers le groupe $\text{Diff}_0^\infty(M)$ des difféomorphismes de classe C^∞ de M isotopes à l'identité tel que, pour tout f de $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$, le difféomorphisme $\sigma(f)$ prolonge f à la bande M . Pour cela, on considère le disque unité ouvert $\overset{\circ}{B}^2$ de \mathbf{R}^2 comme plongé dans le plan projectif réel P^2 . Le complémentaire de $\overset{\circ}{B}^2$ dans P^2 est une bande de Moebius M dont le bord est le cercle unité S^1 . Deux points de S^1 , éventuellement confondus, définissent deux tangentes dans P^2 qui se coupent en un point de M . Réciproquement, par un point de M passent deux tangentes à S^1 (confondues si le point considéré est sur S^1). Ainsi M s'identifie à l'espace des paires de points (éventuellement confondus) sur un cercle et le bord de M correspond aux paires de points confondus. Il est maintenant clair qu'un difféomorphisme f du cercle S^1 définit naturellement un difféomorphisme $\sigma(f)$ de M qui prolonge f à la bande M .

La démonstration du théorème lorsque $n = 1$ est élémentaire et va servir de modèle pour le cas général. Nous avons cru utile de détailler d'abord ce cas particulier au paragraphe 2. Une lecture sommaire de cette note pourrait d'ailleurs se limiter à ce paragraphe. On étudie alors le cas où n est un entier impair quelconque au paragraphe 3 puis le cas où n est pair au paragraphe 4. Le paragraphe 5 est consacré à des remarques générales inspirées par le théorème.

2. LE CAS $n = 1$

Nous commencerons par un lemme élémentaire. La démonstration que nous en proposons est rapide mais elle utilise des outils puissants d'analyse. Il est possible par ailleurs d'en donner une démonstration topologique (voir [4]).