

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE  
**Autor:** Ghys, Etienne  
**Kapitel:** 2. Le cas  $n=1$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58729>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 29.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

THÉOREME. *Il n'existe aucun morphisme de groupes  $\sigma$  de  $\text{Diff}_0^\infty(S^n)$  vers  $\text{Diff}_0^1(B^{n+1})$  tel que, pour tout  $f$  de  $\text{Diff}_0^\infty(S^n)$ , le difféomorphisme  $\sigma(f)$  soit un prolongement de  $f$  à la boule.*

Insistons sur le fait que dans l'énoncé du théorème on ne suppose pas que le morphisme  $\sigma$  est continu; il s'agit *a priori* d'un morphisme de groupes abstraits.

Voici un exemple d'une situation contraire. Considérons le cercle comme bord de la bande de Moebius  $M$ . Il se trouve que, dans ce cas, il existe un morphisme  $\sigma$  de  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  vers le groupe  $\text{Diff}_0^\infty(M)$  des difféomorphismes de classe  $C^\infty$  de  $M$  isotopes à l'identité tel que, pour tout  $f$  de  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ , le difféomorphisme  $\sigma(f)$  prolonge  $f$  à la bande  $M$ . Pour cela, on considère le disque unité ouvert  $\overset{\circ}{B}^2$  de  $\mathbf{R}^2$  comme plongé dans le plan projectif réel  $P^2$ . Le complémentaire de  $\overset{\circ}{B}^2$  dans  $P^2$  est une bande de Moebius  $M$  dont le bord est le cercle unité  $S^1$ . Deux points de  $S^1$ , éventuellement confondus, définissent deux tangentes dans  $P^2$  qui se coupent en un point de  $M$ . Réciproquement, par un point de  $M$  passent deux tangentes à  $S^1$  (confondues si le point considéré est sur  $S^1$ ). Ainsi  $M$  s'identifie à l'espace des paires de points (éventuellement confondus) sur un cercle et le bord de  $M$  correspond aux paires de points confondus. Il est maintenant clair qu'un difféomorphisme  $f$  du cercle  $S^1$  définit naturellement un difféomorphisme  $\sigma(f)$  de  $M$  qui prolonge  $f$  à la bande  $M$ .

La démonstration du théorème lorsque  $n = 1$  est élémentaire et va servir de modèle pour le cas général. Nous avons cru utile de détailler d'abord ce cas particulier au paragraphe 2. Une lecture sommaire de cette note pourrait d'ailleurs se limiter à ce paragraphe. On étudie alors le cas où  $n$  est un entier impair quelconque au paragraphe 3 puis le cas où  $n$  est pair au paragraphe 4. Le paragraphe 5 est consacré à des remarques générales inspirées par le théorème.

## 2. LE CAS $n = 1$

Nous commencerons par un lemme élémentaire. La démonstration que nous en proposons est rapide mais elle utilise des outils puissants d'analyse. Il est possible par ailleurs d'en donner une démonstration topologique (voir [4]).

LEMME 2.1. Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  du disque  $B^2$  qui est d'ordre fini et respecte l'orientation. Alors  $f$  est  $C^1$ -conjugué à une rotation euclidienne du disque  $B^2$ .

*Démonstration.* Par moyennisation, on construit une métrique riemannienne sur  $B^2$  invariante par  $f$ . Le disque  $B^2$  muni de cette métrique est conformément équivalent au disque unité de  $\mathbf{C}$ . Ceci résulte d'une part de l'existence de coordonnées isothermes sur les surfaces et d'autre part du théorème d'uniformisation de Riemann. Le lemme est alors une conséquence de la classification des difféomorphismes holomorphes du disque unité.  $\square$

Le groupe  $G = PSL(2, \mathbf{R})$  opère par difféomorphismes projectifs sur la droite projective réelle  $P^1$ , difféomorphe au cercle  $S^1$ . Soit  $G_\infty$  le revêtement universel de  $G$  qui est aussi le groupe des relevés des éléments de  $G$  au revêtement universel de  $P^1$ , difféomorphe à la droite  $\mathbf{R}$ . On a une extension centrale:

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow G_\infty \rightarrow G \rightarrow 1 .$$

Le sous-groupe  $\mathbf{Z}$  de  $G_\infty$  correspond aux relevés de l'identité, c'est-à-dire aux translations d'amplitudes entières de la droite.

Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $G_p$  le revêtement à  $p$  feuillets de  $G$ , constitué des relevés des éléments de  $G$  au revêtement à  $p$  feuillets de  $P^1 \simeq S^1$ , lui aussi difféomorphe à  $S^1$ . On a ainsi un plongement:

$$i: G_p \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(S^1) .$$

Le groupe  $G_p$  est une extension centrale:

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow G_p \rightarrow G \rightarrow 1 .$$

C'est aussi le quotient de  $G_\infty$  par le sous-groupe central  $p\mathbf{Z}$ .

Le lemme suivant est apparenté à la non trivialité de l'extension de  $G$  par  $\mathbf{Z}$  définissant  $G_\infty$ , soulignée pour la première fois par J. Milnor [5]. La preuve que nous en proposons est inspirée de [1].

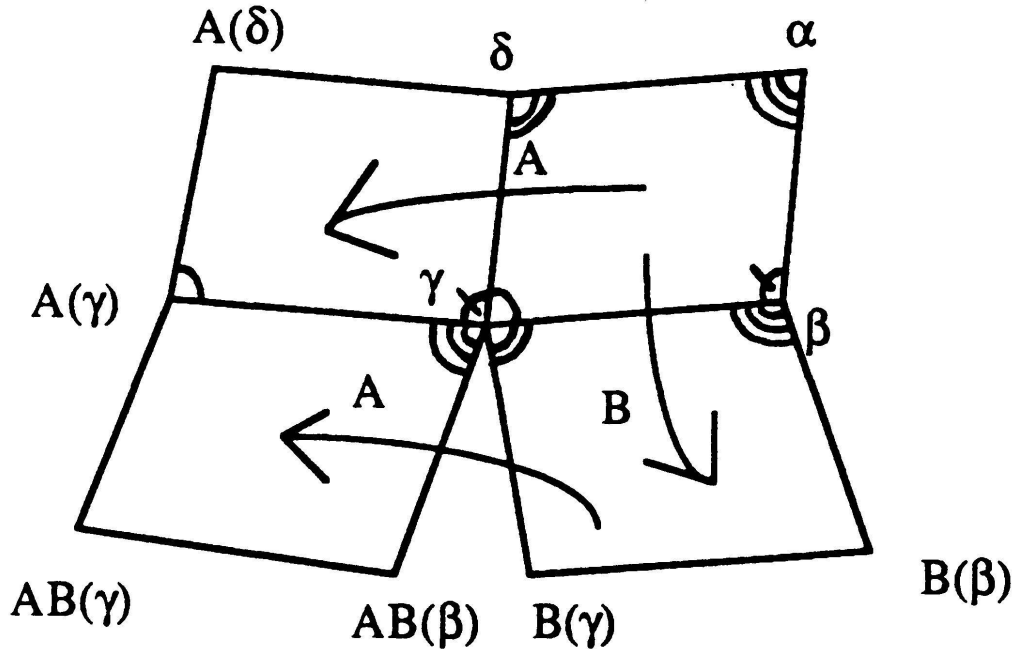
LEMME 2.2. Le sous-groupe  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  de  $G_p$  est contenu dans le groupe des commutateurs de  $G_p$ .

*Démonstration.* Soit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  quatre points du disque de Poincaré  $D^2$  dont les distances mutuelles vérifient

$$d(\alpha, \beta) = d(\gamma, \delta) \quad \text{et} \quad d(\alpha, \delta) = d(\beta, \gamma) .$$

Soit  $A$  l'isométrie directe du disque de Poincaré qui envoie  $\alpha$  et  $\beta$  sur  $\delta$  et  $\gamma$  et  $B$  celle qui envoie  $\alpha$  et  $\delta$  sur  $\beta$  et  $\gamma$ . Le commutateur  $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$

fixe le point  $\gamma$ ; c'est donc une rotation de centre  $\gamma$ . Ce commutateur envoie le segment joignant  $\gamma$  à  $B(\gamma) = BA(\beta)$  sur le segment joignant  $\gamma$  à  $AB(\beta)$ . La figure suivante montre que l'angle entre ces deux segments est la somme des angles intérieurs du quadrilatère  $\alpha\beta\gamma\delta$ .



D'après une propriété bien connue de géométrie hyperbolique, cette somme est égale au complément à  $2\pi$  de l'aire du quadrilatère  $\alpha\beta\gamma\delta$ . Si l'on choisit convenablement l'orientation de ce quadrilatère, l'angle de la rotation  $[A, B]$  est égal à l'aire de  $\alpha\beta\gamma\delta$  et il peut donc prendre toutes les valeurs strictement inférieures à  $2\pi$  lorsque  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  varient dans  $D^2$ . Rappelons que  $G$  s'interprète comme groupe des isométries directes du disque de Poincaré  $D^2$ ; l'action sur  $P^1$  que nous étudions apparaissant comme action sur le bord de  $D^2$ . Une rotation de  $D^2$  correspond, sur  $P^1 \simeq S^1$ , à une transformation projective conjuguée à une rotation euclidienne du cercle  $S^1$  de même angle. On constate donc qu'il est possible de construire deux courbes de classe  $C^\infty$

$$t \in [0, 2\pi[ \mapsto A_t \in G,$$

$$t \in [0, 2\pi[ \mapsto B_t \in G,$$

avec  $A_0 = B_0 = \text{id}$  et telles que  $[A_t, B_t]$  soit la rotation d'angle  $t$ .

Ces courbes se relèvent dans  $G_\infty$  en des courbes  $\tilde{A}_t$  et  $\tilde{B}_t$  avec  $\tilde{A}_0 = \text{id} = \tilde{B}_0$  et il est clair que l'élément  $[\tilde{A}_\pi, \tilde{B}_\pi]^2$  est l'élément 1 du sous-groupe  $\mathbf{Z}$  de  $G_\infty$ . En passant au quotient par  $p\mathbf{Z}$ , nous avons ainsi exprimé le générateur 1 de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  dans  $G_p$  comme un produit de deux commutateurs.  $\square$

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^1) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^2)$$

qui prolonge les difféomorphismes du cercle au disque. Notons  $u$  l'élément 1 de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  engendrant le centre de  $G_p$ . Le difféomorphisme  $\sigma(i(u))$  de  $B^2$  est d'ordre  $p$ . Il est conjugué à une rotation d'ordre  $p$  d'après 2.1 et fixe donc un unique point  $x_0$  de  $B^2$ .

Puisque  $u$  est central dans  $G_p$ , tous les éléments de  $\sigma(G_p)$  fixent  $x_0$ . Par passage à la différentielle en  $x_0$ , on construit donc un morphisme

$$D: G_p \rightarrow GL(T_{x_0}B^2) \simeq GL(2, \mathbf{R}) .$$

A conjugaison près, on peut supposer que  $D(u)$  est une rotation d'ordre  $p$ .

LEMME 2.3. *Si  $p \geq 3$ , le centralisateur d'une rotation d'ordre  $p$  dans  $GL(2, \mathbf{R})$  est abélien.*

*Démonstration.* Ce centralisateur coïncide en effet avec le groupe de similitudes de  $\mathbf{R}^2$ .  $\square$

La démonstration du théorème lorsque  $n = 1$  est maintenant facile. Le morphisme  $D$ , étant à valeurs dans le centralisateur de  $D(u)$ , a une image abélienne. Il en résulte que  $D$  est trivial sur le groupe des commutateurs de  $G_p$  et donc sur  $u$  d'après 2.2. Mais ceci est absurde puisque  $D(u)$  est conjugué à une rotation d'ordre  $p$ .

On remarquera que nous n'avons utilisé l'hypothèse sur  $\sigma$  que pour pouvoir affirmer que l'ordre de  $\sigma(i(u))$  est exactement  $p$ . Nous avons donc montré en fait un résultat plus fort: le groupe  $G_p$  et, *a fortiori*,  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ , ne se plongent pas dans  $\text{Diff}_0^1(B^2)$ . Si l'on tient compte du résultat (difficile) selon lequel  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  est un groupe simple [7], et donc qu'un morphisme de source  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  est injectif ou trivial, on déduit:

THÉORÈME. *Il n'existe aucun morphisme non trivial de  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  vers  $\text{Diff}_0^1(B^2)$ .*

### 3. LE CAS DES SPHÈRES IMPAIRES

Si  $n$  s'écrit sous la forme  $2k - 1$ , nous identifierons la sphère  $S^n$  avec l'ensemble des points  $(z_1, \dots, z_k)$  de  $\mathbf{C}^k$  tels que  $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$ . Soit  $p$