

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE  
**Autor:** Ghys, Etienne  
**Kapitel:** 3. Le cas des sphères impaires  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58729>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^1) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^2)$$

qui prolonge les difféomorphismes du cercle au disque. Notons  $u$  l'élément 1 de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  engendrant le centre de  $G_p$ . Le difféomorphisme  $\sigma(i(u))$  de  $B^2$  est d'ordre  $p$ . Il est conjugué à une rotation d'ordre  $p$  d'après 2.1 et fixe donc un unique point  $x_0$  de  $B^2$ .

Puisque  $u$  est central dans  $G_p$ , tous les éléments de  $\sigma(G_p)$  fixent  $x_0$ . Par passage à la différentielle en  $x_0$ , on construit donc un morphisme

$$D: G_p \rightarrow GL(T_{x_0}B^2) \simeq GL(2, \mathbf{R}) .$$

A conjugaison près, on peut supposer que  $D(u)$  est une rotation d'ordre  $p$ .

LEMME 2.3. *Si  $p \geq 3$ , le centralisateur d'une rotation d'ordre  $p$  dans  $GL(2, \mathbf{R})$  est abélien.*

*Démonstration.* Ce centralisateur coïncide en effet avec le groupe de similitudes de  $\mathbf{R}^2$ .  $\square$

La démonstration du théorème lorsque  $n = 1$  est maintenant facile. Le morphisme  $D$ , étant à valeurs dans le centralisateur de  $D(u)$ , a une image abélienne. Il en résulte que  $D$  est trivial sur le groupe des commutateurs de  $G_p$  et donc sur  $u$  d'après 2.2. Mais ceci est absurde puisque  $D(u)$  est conjugué à une rotation d'ordre  $p$ .

On remarquera que nous n'avons utilisé l'hypothèse sur  $\sigma$  que pour pouvoir affirmer que l'ordre de  $\sigma(i(u))$  est exactement  $p$ . Nous avons donc montré en fait un résultat plus fort: le groupe  $G_p$  et, *a fortiori*,  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ , ne se plongent pas dans  $\text{Diff}_0^1(B^2)$ . Si l'on tient compte du résultat (difficile) selon lequel  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  est un groupe simple [7], et donc qu'un morphisme de source  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  est injectif ou trivial, on déduit:

THÉORÈME. *Il n'existe aucun morphisme non trivial de  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  vers  $\text{Diff}_0^1(B^2)$ .*

### 3. LE CAS DES SPHÈRES IMPAIRES

Si  $n$  s'écrit sous la forme  $2k - 1$ , nous identifierons la sphère  $S^n$  avec l'ensemble des points  $(z_1, \dots, z_k)$  de  $\mathbf{C}^k$  tels que  $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$ . Soit  $p$

un nombre premier. Nous noterons  $C_p$  le sous-groupe de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1})$  formé des difféomorphismes du type

$$f: (z_1, \dots, z_k) \in S^{2k-1} \mapsto (w_1 z_1, \dots, w_k z_k) \in S^{2k-1},$$

où  $w_1, \dots, w_k$  sont des racines  $p$ -èmes de l'unité. Bien sûr,  $C_p$  est un groupe isomorphe à  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^k$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^{2k})$$

qui prolonge les difféomorphismes de la sphère à la boule.

LEMME 3.1. *Il existe un unique point  $x_0$  intérieur à  $B^{2k}$  qui est fixe par  $\sigma(C_p)$ .*

*Démonstration.* Rappelons d'abord qu'un difféomorphisme périodique de période  $p$  est localement linéarisable au voisinage d'un point fixe (voir par exemple [2]). Il en résulte que l'ensemble des points fixes d'un tel difféomorphisme est une sous-variété. Lorsque la variété ambiante est la sphère  $S^n$ , la sous-variété des points fixes, si elle n'est pas vide, a la même homologie modulo  $p$  qu'une sphère de dimension  $d$  avec  $0 \leq d \leq n$ . C'est un exemple classique d'application de la théorie de Smith: voir par exemple [2].

Soit  $f$  un élément de  $C_p$  tel qu'aucun des  $w_i$  qui lui correspondent ne soit égal à 1. Ainsi,  $f$  n'a pas de point fixe sur  $S^{2k-1}$ . Le difféomorphisme  $\sigma(f)$  de  $B^{2k}$  a bien sûr au moins un point fixe intérieur à  $B^{2k}$ . En collant deux copies du difféomorphisme  $\sigma(f)$  de  $B^{2k}$  le long du bord  $S^{2k-1}$ , on obtient un difféomorphisme  $F$  de  $S^{2k}$ , double de  $\sigma(f)$ . Ce difféomorphisme  $F$  est d'ordre  $p$ , sans point fixe sur  $S^{2k-1}$  et possède au moins un point fixe dans chacun des deux hémisphères bordés par  $S^{2k-1}$ . L'ensemble de ses points fixes n'est donc pas connexe. Il résulte du rappel que nous venons de faire que l'ensemble des points fixes de  $F$  a l'homologie modulo  $p$  d'une sphère de dimension 0 et que c'est en fait une sphère de dimension 0, c'est-à-dire un ensemble à deux éléments! Autrement dit,  $\sigma(f)$  a un unique point fixe  $x_0$  dans  $B^{2k}$ .

Le lemme est alors une conséquence de la commutativité de  $C_p$  et du fait que les  $f$  pour lesquels aucun  $w_i$  n'est égal à 1 engendrent  $C_p$ .  $\square$

Considérons la différentielle de  $\sigma(C_p)$  en  $x_0$ . On obtient ainsi un morphisme

$$D: C_p \rightarrow GL(T_{x_0} B^{2k}) \simeq GL(2k, \mathbf{R}).$$

LEMME 3.2. *A conjugaison près, on peut supposer que l'image par  $D$  de  $C_p$  coïncide avec le sous-groupe  $\overline{C_p}$  formé des applications linéaires de  $\mathbf{R}^{2k} \simeq \mathbf{C}^k$  du type*

$$(z_1, \dots, z_k) \in \mathbf{C}^k \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k) \in \mathbf{C}^k,$$

avec  $\mu_i$  racine  $p$ -ème de l'unité.

*Démonstration.* Le fait que  $D(C_p)$  soit, à conjugaison près, contenu dans  $\overline{C_p}$  résulte de la classification des sous-groupes finis commutatifs de  $GL(2k, \mathbf{R})$  dont tous les éléments sont d'ordre  $p$ . Nous avons déjà rappelé qu'un difféomorphisme d'ordre fini est localement conjugué à sa différentielle au voisinage d'un point fixe. Il en résulte qu'un difféomorphisme d'ordre fini d'une variété connexe ne peut avoir une différentielle égale à l'identité en un point fixe à moins que ce difféomorphisme ne soit l'identité. En d'autres termes,  $D$  est injective et on a donc  $D(C_p) = \overline{C_p}$  (à conjugaison près).  $\square$

Remarquons que nous n'affirmons pas que si  $f \in C_p$  est défini par  $(w_1, \dots, w_k)$ , alors le  $k$ -uplet  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  qui définit  $D(f)$  coïncide avec  $(w_1, \dots, w_k)$ .

On choisit  $p > k$  et  $f$  un élément de  $C_p$  tels que  $D(f)$  soit une application linéaire du type:

$$(z_1, \dots, z_k) \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k),$$

où les  $\mu_i$  sont distincts deux à deux et différents de 1. Ceci implique que  $x_0$  est un point fixe isolé de  $\sigma(f)$  et les considérations du lemme 3.1 entraînent que  $x_0$  est le seul point fixe de  $\sigma(f)$ .

LEMME 3.3. *Le centralisateur  $Z$  de  $D(f)$  dans  $GL(2k, \mathbf{R})$  est abélien.*

*Démonstration.* Tout élément de  $Z$  est diagonal, car il préserve les directions propres de  $D(f)$ .  $\square$

Soit  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f)$  le groupe des difféomorphismes de  $S^{2k-1}$  de classe  $C^\infty$  commutant avec  $f$  et isotopes à l'identité par une isotopie commutant avec  $f$ . Le groupe  $\sigma \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f) \subset \text{Diff}_0^1(B^{n+1})$  fixe évidemment  $x_0$  et la différentielle en  $x_0$  est dans  $Z$ . On a donc un morphisme

$$D: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f) \rightarrow Z$$

qui envoie  $f$  sur un élément non trivial.

La contradiction cherchée est dans le lemme suivant, analogue au lemme 2.2. Il ne serait pas difficile de déduire ce lemme d'un théorème profond

de W. Thurston sur la simplicité de certains groupes de difféomorphismes. Il nous semble cependant intéressant de démontrer le lemme de manière complètement explicite.

LEMME 3.4. *L'élément  $f$  appartient au groupe des commutateurs de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f)$ .*

*Démonstration.* Soit  $w_1, \dots, w_k$  les racines de l'unité telles que

$$f(z_1, \dots, z_k) = (w_1 z_1, \dots, w_k z_k)$$

Puisque  $\sigma(f)$  ne fixe que le point  $x_0$  dans  $B^{n+1}$ , le difféomorphisme  $f$  n'a pas de point fixe dans  $S^n$  c'est-à-dire que les  $w_i$  sont tous différents de 1. Fixons des entiers non nuls  $n_1, \dots, n_k$  tels que:

$$w_j = \exp(2i\pi n_j/p) \quad j = 1, \dots, k.$$

Soit  $\phi_t$  le flot périodique ( $\phi_1 = \text{id}$ ) défini sur  $S^{2k-1}$  par:

$$\phi_t(z_1, \dots, z_k) = (\exp(2i\pi n_1 t)z_1, \dots, \exp(2i\pi n_k t)z_k).$$

On a  $f = \phi_{1/p}$ .

Soit  $N$  le plus petit multiple commun de  $p, n_1, \dots, n_k$ . Ainsi  $1/p$  et toutes les périodes des orbites périodiques de  $\phi_t$  sont des multiples entiers de  $1/N$ .

Comme pour tout flot périodique sans point fixe, on peut recouvrir  $S^{2k-1}$  par un nombre fini d'ouverts  $U_j$  «trivialisants» pour le fibré de Seifert associé. Plus précisément,  $U_j$  est difféomorphe au quotient de  $\mathring{B}^{2k-2} \times S^1$  par un difféomorphisme périodique du type

$$(u_1, \dots, u_{k-1}, \theta) \in \mathring{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (\alpha_1 u_1, \dots, \alpha_{k-1} u_{k-1}, w\theta) \in \mathring{B}^{2k-2} \times S^1$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, w$  sont des racines  $N$ -èmes de l'unité. Dans ces coordonnées, le flot  $\phi_t$  se relève à  $\mathring{B}^{2k-2} \times S^1$  par

$$\bar{\phi}_t(u_1, \dots, u_{k-1}, \theta) = (u_1, \dots, u_{k-1}, \exp(2i\pi t)\theta).$$

Rappelons que nous avons construit au paragraphe précédent des courbes  $A_t$  et  $B_t$  dans  $G = \text{PSL}(2, \mathbf{R})$  (avec  $t \in [0, 2\pi[$ ) et leurs relevés  $\tilde{A}_t$  et  $\tilde{B}_t$  dans  $G_\infty$ . Notons  $\bar{A}_t$  et  $\bar{B}_t$  les projections de  $\tilde{A}_t$  et  $\tilde{B}_t$  dans  $G_N$ . Les éléments  $\bar{A}_t$  et  $\bar{B}_t$  peuvent être considérés comme des difféomorphismes du cercle  $S^1$  commutant avec la rotation d'angle  $2\pi/N$ . De plus,  $[\bar{A}_t, \bar{B}_t]$  est une rotation d'angle  $t/N$ .

Soit  $\tau_j: S^{2k-1} \rightarrow [0, 2\pi[$  une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $U_j$  et invariante par  $\phi_t$ . On note aussi  $\tau_j: \mathring{B}^{2k-2} \times S^1 \rightarrow [0, 2\pi[$  la fonction

obtenue en composant la projection de  $\check{B}^{2k-2} \times S^1$  sur  $U_j$  et  $\tau_j$ . On remarquera que  $\tau_j(x, \theta)$  ne dépend pas de  $\theta$  car  $\tau_j$  est invariant par  $\phi_t$ . Les applications

$$(x, \theta) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (x, \bar{A}_{\tau_j(x)}(\theta)) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1$$

$$(x, \theta) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (x, \bar{B}_{\tau_j(x)}(\theta)) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1$$

passent au quotient en des difféomorphismes de  $U_j$  à supports compacts. En prolongeant ces difféomorphismes par l'identité en dehors de  $U_j$ , on obtient des difféomorphismes  $\bar{A}_{\tau_j}$  et  $\bar{B}_{\tau_j}$  de  $S^{2k-1}$  qui commutent évidemment avec  $f$ . Par ailleurs,

$$[\bar{A}_{\tau_j}, \bar{B}_{\tau_j}](m) = \phi_{\tau_j(m)/N}(m).$$

Le difféomorphisme  $f$  coïncide avec  $\phi_{1/p}$ . Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit donc d'écrire la fonction constante  $N/p$  comme somme de fonctions  $\tau_j$  du type précédent:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{N} \tau_1 + \dots + \frac{1}{N} \tau_q.$$

En effet, on aura alors

$$f = \phi_{1/p} = [\bar{A}_{\tau_1}, \bar{B}_{\tau_1}] \dots [\bar{A}_{\tau_q}, \bar{B}_{\tau_q}].$$

Pour cela, il suffit d'utiliser une partition de l'unité subordonnée aux  $U_j$  et d'en prendre la moyenne sous l'action de  $S^1$  associée à  $\phi_t$  pour la rendre invariante.  $\square$

#### 4. LE CAS DES SPHÈRES PAIRES

Nous identifierons la sphère  $S^{2k}$  à l'ensemble des points  $(z_1, \dots, z_k, t)$  de  $\mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$  tels que  $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 + t^2 = 1$ . Comme précédemment, nous fixons un nombre premier  $p$  et nous considérons le groupe  $C_p$  des difféomorphismes de  $S^{2k}$ , isotopes à l'identité, du type:

$$f: (z_1, \dots, z_k, t) \in S^{2k} \mapsto (w_1 z_1, \dots, w_k z_k, t) \in S^{2k},$$

où les  $w_i$  sont des racines  $p$ -èmes de l'unité.

Supposons encore par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k}) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^{2k+1})$$

qui prolonge les difféomorphismes de la sphère à la boule.