Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE

Autor: Ghys, Etienne

Kapitel: 5. Quelques remarques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58729

Appliquons cette technique à la situation du lemme. Dans ce cas, l'action de $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ considérée est engendrée par f_1 et f_2 d'ordres respectifs p et q, agissant sur $S^{2k} - \{N, S\}$. Nous obtenons que si g et h sont deux difféomorphismes de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ à supports dans un ouvert U assez petit de $S^{2k} - \{N, S\}$, le commutateur $[g, h]$ appartient au groupe engendré par les sous-groupes $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)\,(i = 1, 2)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que ces commutateurs engendrent $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$. Ceci résulte de deux faits. Tout d'abord, si les ouverts U_j recouvrent $S^{2k} - \{N, S\}$, les groupes $\mathrm{Diff}_{0,c}^\infty(U_j) \subset \mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ engendrent $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$; c'est le lemme de fragmentation de [6]. D'autre part, d'après le théorème de W. Thurston déjà mentionné, les groupes $\mathrm{Diff}_{0,c}^\infty(U_i)$ sont des groupes simples et donc sont engendrés par les commutateurs. □

Soit s l'involution isotope à l'identité définie par

$$s(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_k + iy_k, t) = (x_1 - iy_1, -x_2 - iy_2, \ldots, -x_k - iy_k, -t)\ .$$

Elle commute avec C_2 de sorte que $\sigma(s)$ préserve I globalement. De plus, s échange S et N et il existe donc un unique point x_0 de I qui est fixe par $\sigma(s)$. Soit W et E les points $(-1, 0, \ldots, 0)$ et $(1, 0, \ldots, 0)$ de S^{2k}. Il est clair que l'arc analogue à I joignant W à E, formé des points fixes de $\sigma(s)$, contient x_0. Les deux groupes $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ et $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ fixent donc x_0 et leurs différentielles en x_0 sont triviales.

LEMME 4.5. *Les groupes* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ *et* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ *engendrent* $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k})$.

Démonstration. Soit f un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k})$. Soit g_1 un élément de $\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$ qui coïncide avec f au voisinage des points N et S et posons $g_2 = g_1^{-1} \circ f$. On a alors $g_2 \in \mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ et $f = g_1 \circ g_2$. □

La contradiction cherchée est maintenant claire. Le groupe $\sigma\mathrm{Diff}_0^\infty(S^{2k})$ tout entier fixe x_0 et sa différentielle en x_0 est triviale. Ceci est absurde puisque les éléments d'ordre fini distincts de l'identité (par exemple ceux de $\sigma(C_p)$) ne peuvent avoir une différentielle égale à l'identité en un point fixe. Ceci termine la preuve du théorème dans le cas où n est pair.

5. QUELQUES REMARQUES

Le résultat obtenu dans cette note suggère immédiatement une question plus générale. Si V est une variété à bord non vide ∂V, dans quelles conditions existe-t-il un morphisme de $\mathrm{Diff}_0^\infty(\partial V)$ vers $\mathrm{Diff}_0^\infty(V)$ qui «prolonge les difféomorphismes à l'intérieur»? Nous avons vu qu'un tel morphisme existe si V est une bande de Moebius et n'existe pas si V est une boule. Le lecteur n'aura maintenant aucune difficulté à traiter le cas général où V est une surface compacte à bord. Qu'en est-il par contre si V est un corps à anses de genre g (i.e. le domaine de $\mathbf{R}^3$ bordé par une surface de genre g plongée de manière habituelle)?

De manière analogue, on peut s'intéresser aux morphismes entre groupes de difféomorphismes de variétés fermées (i.e. compactes sans bord). Voici deux exemples.

On peut identifier l'espace projectif complexe $\mathbf{CP}^n$ au quotient de $(S^2)^n$ par l'action du groupe symétrique. Cette identification peut être obtenue de la façon suivante. Au point de coordonnées homogènes $[a_0 : a_1 : \ldots : a_n]$ de $\mathbf{CP}^n$, on associe les n zéros du polynôme $a_0 z^n + \ldots + a_n$ dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$ qui sont définis à l'ordre près. Il est facile de vérifier qu'un difféomorphisme de classe C^∞ de S^2 mène ainsi à un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbf{CP}^n$ et on a donc un morphisme naturel:

$$\mathrm{Diff}_0^\infty(S^2) \to \mathrm{Diff}_0^\infty(\mathbf{CP}^n) \ .$$

Une deuxième construction générale s'obtient de la façon suivante. Si V est une variété fermée et si PTV désigne le projectifié du fibré tangent à V, on a un morphisme obtenu par différentielle:

$$\mathrm{Diff}_0^\infty(V) \to \mathrm{Diff}_0^\infty(PTV) \ .$$

On notera que PTV est fermée. Ces exemples suggèrent la question qui suit:

QUESTION. *Soit* V_1 *et* V_2 *deux variétés fermées telles qu'il existe un morphisme non trivial de* $\mathrm{Diff}_0^\infty(V_1)$ *vers* $\mathrm{Diff}_0^\infty(V_2)$. *Peut-on affirmer que la dimension de* V_1 *est inférieure ou égale à celle de* V_2?

Les cas d'isomorphismes entre groupes de difféomorphismes ont été étudiés dans [3]: $\mathrm{Diff}_0^\infty(V_1)$ et $\mathrm{Diff}_0^\infty(V_2)$ ne sont isomorphes que si V_1 et V_2 sont difféomorphes.

Signalons enfin que les méthodes utilisées dans cet article tombent en défaut dans le contexte analytique réel (sauf lorsque $n = 1$).