

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOUS-GROUPES LIBRES DANS LES GROUPES  
D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES  
**Autor:** Pays, Isabelle / Valette, Alain  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58735>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SOUS-GROUPES LIBRES  
DANS LES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES

par Isabelle PAYS et Alain VALETTE

*«Auprès de mon arbre, je vivais heureux...  
J'aurais jamais dû m'éloigner d'mon arbre»*

Georges Brassens

0. INTRODUCTION

Si  $\mathcal{C}$  est une classe de groupes, nous dirons que  $\mathcal{C}$  *satisfait l'alternative de Tits* si tout groupe de  $\mathcal{C}$  ou bien contient un sous-groupe résoluble d'indice fini, ou bien contient un sous-groupe libre non abélien. La terminologie fait bien sûr référence au fameux résultat de Tits ([T2], Theorem 1 et Corollary 1) qui assure que l'alternative est satisfaite par la classe des groupes linéaires en caractéristique nulle, ainsi que par la classe des groupes finiment engendrés linéaires en caractéristique positive. Par la suite, l'alternative a été établie, parfois sous des formes plus précises, pour de nombreuses classes intéressantes; citons la classe des sous-groupes des groupes d'isotopie de difféomorphismes de surfaces ([Mc], Theorem A), la classe des sous-groupes des groupes hyperboliques au sens de Gromov ([Gr], § 3.1; [GH], Théorème 37 du Chapitre 8), la classe des produits à un relateur de groupes cycliques [FLR]<sup>1</sup>). Mentionnons encore une preuve élémentaire de l'alternative pour la classe des groupes de Coxeter [H2], et des bornes sur l'indice d'un sous-groupe résoluble d'indice fini dans un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  sans sous-groupe libre non abélien [Wa].

Dans le présent travail, on s'intéresse à la classe des sous-groupes du groupe des automorphismes d'un arbre localement fini. Si l'on se fie à la philosophie selon laquelle les groupes d'automorphismes d'arbres ont beaucoup d'ana-

<sup>1</sup>) Plus précisément, il s'agit des groupes ayant une présentation de la forme

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n; a_i^{e_i} = 1 (i = 1, \dots, n), R^m = 1 \rangle$$

où  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ ,  $2 \leq e_i \leq \infty (i = 1, \dots, n)$ , et  $R$  est un mot cycliquement réduit où apparaissent tous les  $a_i$ .

logies avec les groupes linéaires (voir [C1] ou l'introduction de [Se] – ces analogies sont à la base de l'analyse harmonique sur les arbres, cf. [C2], [N1], [Sz], [V1]), il paraît naturel de se demander si la classe des sous-groupes des groupes d'automorphismes d'arbres localement finis satisfait l'alternative de Tits. Mais la réponse est *négative*: en effet, pour tout premier  $p$  impair, Gupta et Sidki [GS] ont construit dans le groupe des automorphismes de l'arbre homogène de degré  $p + 1$  un sous-groupe  $\Gamma_p$  sur deux générateurs qui est un  $p$ -groupe infini:  $\Gamma_p$  ne contient aucun groupe libre non trivial (c'est un groupe de torsion), et ne contient aucun sous-groupe résoluble d'indice fini (un  $p$ -groupe résoluble et finiment engendré est fini)<sup>2</sup>).

Ce résultat semble indiquer qu'une caractérisation algébrique des sous-groupes du groupe des automorphismes d'un arbre localement fini qui contiennent un sous-groupe libre non abélien sera compliquée. Par contraste, il peut être intéressant de savoir qu'il existe une caractérisation simple des sous-groupes qui contiennent un groupe libre non abélien *agissant librement* (au sens où les stabilisateurs des sommets de l'arbre dans ce groupe libre sont triviaux)<sup>3</sup>). Cette caractérisation est notre résultat principal.

**THÉORÈME.** *Soient  $X$  un arbre localement fini, et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut } X$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- i)  $G$  ne fixe aucun sommet, aucune arête, aucun bout et aucune paire de bouts de  $X$ ;
- ii)  $G$  contient un sous-groupe libre non abélien qui agit librement sur  $X$ ;
- iii)  $G$  contient un sous-groupe libre non abélien discret dans  $\text{Aut } X$ ;
- iv) L'adhérence  $\bar{G}$  de  $G$  dans  $\text{Aut } X$  n'est pas moyennable.

Nous renvoyons au §1 pour les rappels nécessaires sur la géométrie des arbres et de leurs automorphismes. Signalons cependant que les points (iii) et (iv) du théorème doivent se comprendre comme suit: comme  $X$  est localement fini, la topologie de la convergence simple sur les sommets de  $X$  fait de  $\text{Aut } X$  un groupe localement compact. La condition (iv) exprime ainsi que le groupe localement compact  $\bar{G}$  n'est pas moyennable.

<sup>2</sup>) Dans une version antérieure de l'article, nous présentions comme une conjecture le fait que la classe des sous-groupes des groupes d'automorphismes d'arbres localement finis satisfait l'alternative de Tits. Nous sommes reconnaissants à H. Bass et A. Lubotzky de nous avoir indiqué la référence [GS].

<sup>3</sup>) Pour un exemple d'arbre dont le groupe des automorphismes contient un sous-groupe libre non abélien agissant non librement, voir la proposition 2 de [V2].

Nous avons démontré le théorème ci-dessus quand nous avons réalisé qu'il était presque entièrement dû à Nebbia ([N2], Theorem 1); Nebbia était surtout préoccupé par la non-moyennabilité des sous-groupes fermés de  $\text{Aut } X$ , de sorte qu'il n'a énoncé que l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (iv), et ce pour les sous-groupes fermés de  $\text{Aut } X$ ; mais l'extension aux sous-groupes quelconques est immédiate. Quant à l'équivalence (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv), elle transparaît dans la preuve (voir d'ailleurs la remarque 3 à la page 375 de [N2]). Mentionnons aussi que Woess a montré comment modifier l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (iv) quand on s'intéresse aux sous-groupes du groupe des automorphismes d'un graphe localement fini ([Wo], Theorems 1, 2).

D'autres portions du théorème apparaissent ailleurs dans la littérature; ainsi, l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) a été obtenue par Culler et Morgan ([CM], Theorem 2.7), dans le contexte plus général des arbres réels, mais sous l'hypothèse supplémentaire que le groupe  $G$  contient un automorphisme hyperbolique. Cette hypothèse est en fait superflue, comme le montre un résultat de Tits ([T1], Proposition 3.4) dans le cas des arbres ordinaires, et un résultat de Tignol ([Ti], Proposition 2.4) dans le cas des arbres réels<sup>4</sup>). Notre apport consiste donc essentiellement à donner une présentation unifiée de tous ces résultats, à simplifier les preuves, et à relier les résultats à quelques problèmes classiques.

L'article se présente comme suit: au §1, nous donnons les rappels nécessaires sur les arbres, leurs automorphismes, et leurs bouts. La preuve du théorème occupe les §§2 à 4, selon le schéma (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (i); nous avons aussi regroupé au §3 quelques rappels sur la moyennabilité. Le §5 est consacré aux corollaires du théorème. Enfin, au §6, nous discutons le cas des arbres réels, et montrons que l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) du théorème subsiste pour les groupes d'isométries de ces espaces.

## 1. RAPPELS SUR LES ARBRES

Un *arbre*  $X$  est un graphe connexe sans circuit (les graphes que nous considérons sont toujours non orientés, sans boucle ni arête multiple). L'arbre  $X$  est *localement fini* si tout sommet n'a qu'un nombre fini de voisins. Si  $x, y$  sont des sommets d'un arbre  $X$ , il existe un unique chemin d'arêtes

---

<sup>4</sup>) Attention à l'énoncé donné dans l'introduction de l'article de Culler et Morgan, où l'hypothèse supplémentaire a été omise! (Comparer dans [CM] le théorème au milieu de la page 573 avec le théorème 2.7, pp. 582-583).

minimal de  $x$  à  $y$ , qui est la *géodésique* de  $x$  à  $y$ ; on notera  $[x, y]$  l'ensemble des sommets de  $X$  sur la géodésique de  $x$  à  $y$ , et  $d(x, y)$  le nombre d'arêtes sur cette géodésique:  $d(x, y)$  est la *distance* de  $x$  à  $y$  (voir [Se], I.2.2).

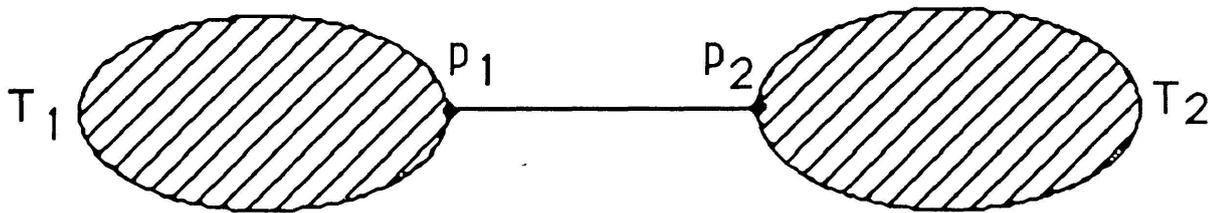
Un *sous-arbre* de l'arbre  $X$  est un sous-graphe connexe de  $X$ . Une *demi-droite* de  $X$  est un sous-arbre isomorphe à une chaîne simplement infinie:



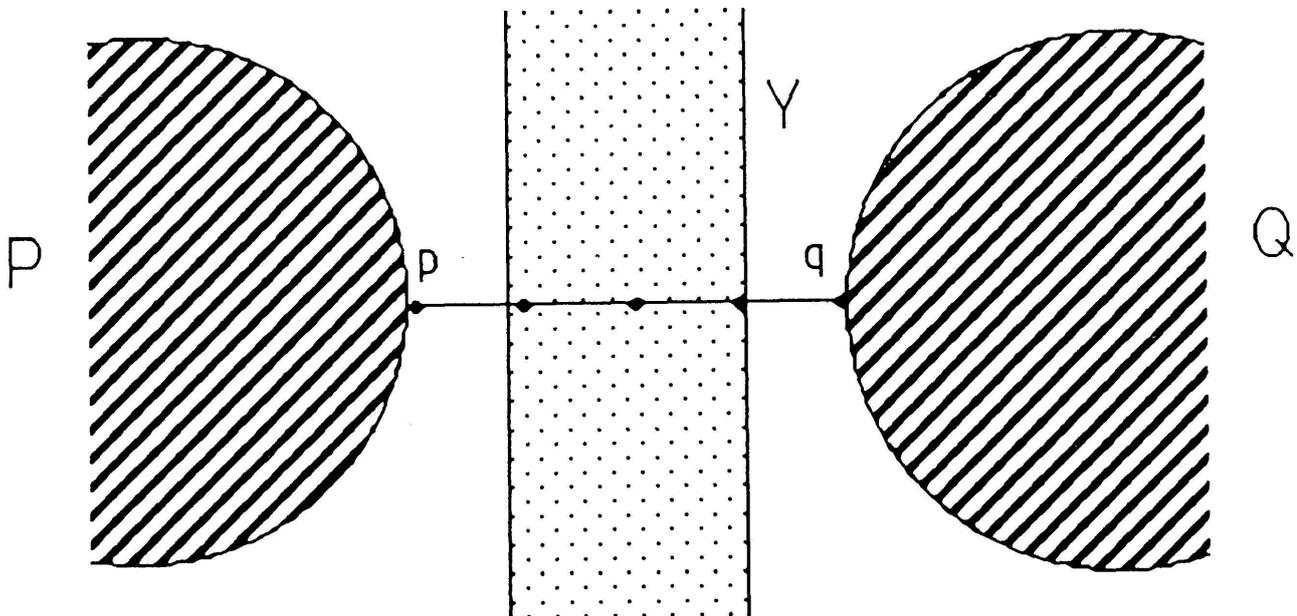
Une *droite* («droit chemin» chez Serre, [Se] I.6.4) est un sous-arbre isomorphe à une chaîne doublement infinie:



Si  $T_1, T_2$  sont deux sous-arbres de  $X$ , non vides et d'intersection réduite à au plus un sommet, il existe un unique couple  $(p_1, p_2) \in T_1 \times T_2$  tel que tout sous-arbre de  $X$  qui rencontre  $T_1$  et  $T_2$  contient  $[p_1, p_2]$  (voir [Se], I.6.4, lemme 9; [T3], Lemma 1.4; [CM], 1.1); la géodésique  $[p_1, p_2]$  est le *pont* qui joint  $T_1$  à  $T_2$ :

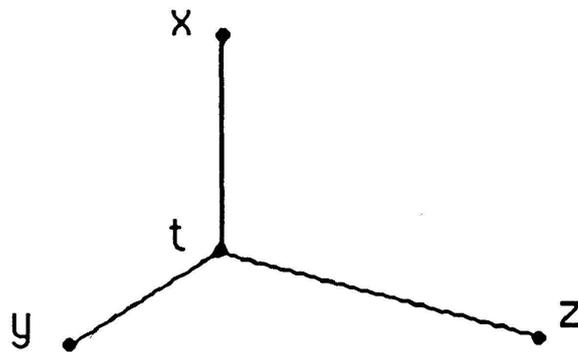


Si  $p, q$  sont deux sommets distincts fixés de  $X$ , et  $x$  un sommet quelconque, nous noterons  $[x, f_{pq}(x)]$  le pont qui joint  $\{x\}$  à  $[p, q]$ ; l'application  $f_{pq}: X \rightarrow [p, q]$  ainsi définie fournit les trois classes de la *partition de  $X$*  associée à  $[p, q]$ :  $P = f_{pq}^{-1}\{p\}$ ;  $Q = f_{pq}^{-1}\{q\}$ ;  $Y = X - (P \cup Q)$  (la classe  $Y$  pouvant être vide si  $[p, q]$  est une arête).



En particulier, si  $S, T$  sont deux sous-arbres non vides et disjoints de  $X$ , et si  $[p, q]$  est le pont qui joint  $S$  à  $T$ , on a  $S \subseteq P$  et  $T \subseteq Q$  dans la partition ci-dessus.

Toute intersection de sous-arbres est clairement un sous-arbre. Cela permet de parler du sous-arbre engendré par une partie quelconque de  $X$ . Notons la forme du sous-arbre engendré par trois sommets  $x, y, z$ : il existe un unique sommet  $t$  tel que  $\{t\} = [x, y] \cap [y, z] \cap [z, x]$ .



LEMME 1 («Théorème de Helly sur un arbre»). Soient  $T_1, T_2, \dots, T_n$  des sous-arbres de l'arbre  $X$  qui se rencontrent deux à deux. Alors leur intersection est non vide.

*Preuve.* On travaille par induction sur  $n$ , en commençant par  $n = 3$ . Pour  $i, j \in \{1, 2, 3\}, i < j$ , faisons choix d'un sommet  $x_{ij}$  dans  $T_i \cap T_j$ . Soit  $t$  l'unique sommet de  $X$  tel que  $\{t\} = [x_{12}, x_{13}] \cap [x_{12}, x_{23}] \cap [x_{23}, x_{13}]$ . Comme  $[x_{ij}, x_{ik}]$  est contenu dans  $T_i$ , on voit que  $t$  est dans  $T_1 \cap T_2 \cap T_3$  (pour une autre preuve de ce cas, voir [CM] 1.2). Traitons maintenant le cas général, et considérons les  $n - 1$  sous-arbres  $T_1 \cap T_n, T_2 \cap T_n, \dots, T_{n-1} \cap T_n$ . Le cas  $n = 3$  déjà traité montre que ces sous-arbres se rencontrent deux à deux. L'hypothèse d'induction permet donc de conclure. On trouvera une autre preuve de ce lemme dans [Se], I.6.5, lemme 10.

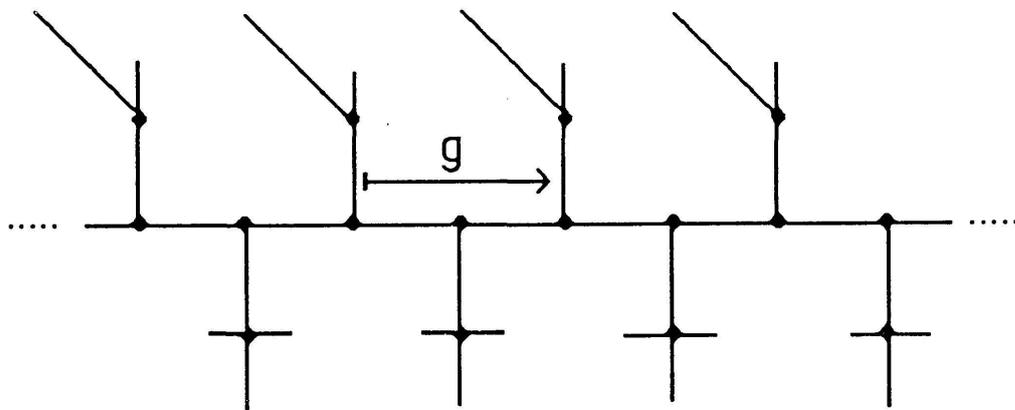
Un *automorphisme* de l'arbre  $X$  est une permutation  $g$  des sommets de  $X$  qui préserve les arêtes<sup>5)</sup>. Cela revient à exiger que  $g$  soit une isométrie pour la distance  $d$ . Un résultat élémentaire mais fondamental de Tits ([T1], Proposition 3.2; voir aussi [Se], I.6.4) montre qu'un arbre peut posséder trois types d'automorphismes:

<sup>5)</sup> Remarque: si  $g$  est un automorphisme,  $g^{-1}$  en est un aussi (la preuve de ce fait, facile, utilise la structure d'arbre: l'énoncé correspondant sur un graphe connexe serait faux!).

— Les automorphismes qui fixent au moins un sommet. Il s'agit des automorphismes *elliptiques*, ou *rotations*. Si  $g$  est un tel automorphisme, on note  $X^g$  l'ensemble des points fixes de  $g$ ; c'est un sous-arbre de  $X$ .

— Les automorphismes qui ne fixent aucun sommet, mais fixent une arête (nécessairement unique). Il s'agit des *inversions*.

— Les automorphismes qui ne fixent ni sommet, ni arête de  $X$ . Il s'agit des automorphismes *hyperboliques*, ou *translations*. Si  $g$  est un tel automorphisme, il existe une unique droite de  $X$  invariante par  $g$ ; cette droite s'appelle l'*axe* de  $g$ , et  $g$  agit par translation le long de son axe.



Si  $g$  est une translation, la *distance de translation*  $l(g)$  de  $g$  est l'entier

$$l(g) = \min_{x \in X} d(gx, x)$$

Il s'agit donc de l'amplitude de la translation induite par  $g$  sur son axe.

Le lemme suivant, qui aide à construire des automorphismes hyperboliques, a été remarqué par plusieurs personnes ([CM], 1.5; [PI], lemme 5.5; [Se], I.6.5, Corollaire 1; [Ti], Corollaire 2.3; voir aussi le lemme 35 du chapitre 8 de [GH] pour une généralisation aux isométries des espaces hyperboliques à la Gromov):

**LEMME 2.** *Soient  $g, h$  deux rotations de l'arbre  $X$ . Si  $X^g \cap X^h$  est vide, alors  $gh$  est une translation.*

*Preuve.* Soit  $[p, q]$  le pont qui joint  $X^g$  à  $X^h$ . On voit alors, en considérant successivement les trois classes de la partition de  $X$  associée à  $[p, q]$ , que pour tout sommet  $x$  de  $X$ , on a  $d(ghx, x) \geq 2 \cdot d(p, q)$ ; donc  $gh$  est une translation.

Muni de la topologie de la convergence simple sur les sommets de  $X$ , le groupe  $\text{Aut } X$  des automorphismes de l'arbre  $X$  s'érige en groupe

topologique. Supposons  $X$  localement fini; pour tout sommet  $x$ , le stabilisateur  $(\text{Aut } X)_x$  de  $x$  dans  $\text{Aut } X$  est alors un sous-groupe compact ouvert; et  $\text{Aut } X$  est un groupe localement compact totalement discontinu.

LEMME 3. Soient  $X$  un arbre localement fini, et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut } X$ . S'il existe un sommet  $x$  de  $X$  dont le stabilisateur dans  $G$  soit réduit au neutre, alors  $G$  est discret dans  $\text{Aut } X$ .

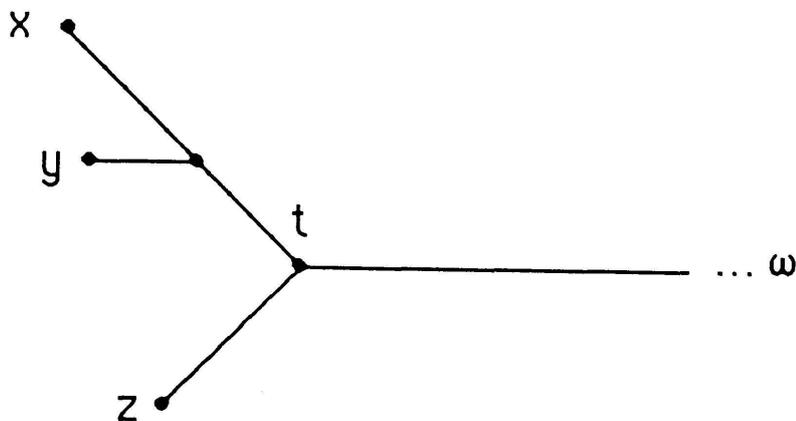
*Preuve.* L'intersection de  $G$  et du sous-groupe ouvert  $(\text{Aut } X)_x$  est réduite au neutre, donc  $G$  est discret.

Deux demi-droites d'un arbre  $X$  sont *équivalentes* si leur intersection est encore une demi-droite (on voit immédiatement que cette relation sur l'ensemble des demi-droites est bien une relation d'équivalence). Un *bout* de  $X$  est une classe d'équivalence de demi-droites de  $X$ ; on note  $\Omega(X)$  l'ensemble des bouts de  $X$ . L'action de  $\text{Aut } X$  sur les demi-droites de  $X$  passe aux classes d'équivalence, et fournit une action de  $\text{Aut } X$  sur  $\Omega(X)$ . On note  $(\text{Aut } X)_\omega$  le stabilisateur du bout  $\omega$  dans  $\text{Aut } X$ , qu'on munit de la topologie de la convergence simple sur  $X$ .

Si  $x$  est un sommet et  $\omega$  un bout de  $X$ , il existe une unique demi-droite d'origine  $x$  qui représente  $\omega$ ; on la note  $[x, \omega[$ . En particulier,  $\Omega(X)$  s'identifie à l'ensemble des demi-droites d'origine  $x$ .

Si  $x, y$  sont des sommets,  $\omega$  un bout de  $X$ , et  $t$  un sommet sur la demi-droite  $[x, \omega[ \cap [y, \omega[$ , la quantité  $d(x, t) - d(y, t)$  est indépendante de  $t$ ; on la note  $d_\omega(x, y)$ . On a la relation immédiate mais importante (voir [C1], § 1):

$$(*) \quad d_\omega(x, z) = d_\omega(x, y) + d_\omega(y, z) \text{ quels que soient } x, y, z \in X.$$



Si  $g \in (\text{Aut } X)_\omega$ , et si  $x$  est un sommet de  $X$ , on pose

$$l_\omega(g) = d_\omega(x, gx)$$

Le lemme suivant montrera entre autres que cette définition ne dépend pas du choix du sommet  $x$ .

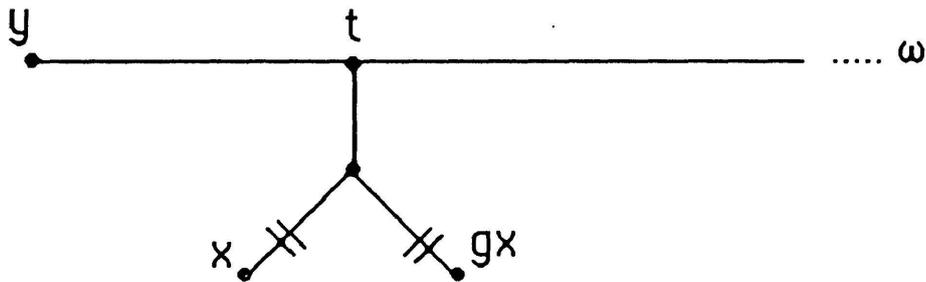
LEMME 4. Soient  $X$  un arbre, et  $\omega$  un bout de  $X$ . Alors

- i)  $(\text{Aut } X)_\omega$  ne contient pas d'inversion;
- ii)  $l_\omega(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \text{ est elliptique} \\ \pm l(g) & \text{si } g \text{ est hyperbolique} \end{cases}$
- iii)  $l_\omega: (\text{Aut } X)_\omega \rightarrow \mathbf{Z}$  est un homomorphisme continu.

*Preuve.* i) Si  $g$  est une inversion et  $x$  un sommet de  $X$ , l'intersection de  $[x, \omega[$  et  $g[x, \omega[$  est finie. Donc  $g\omega \neq \omega$ .

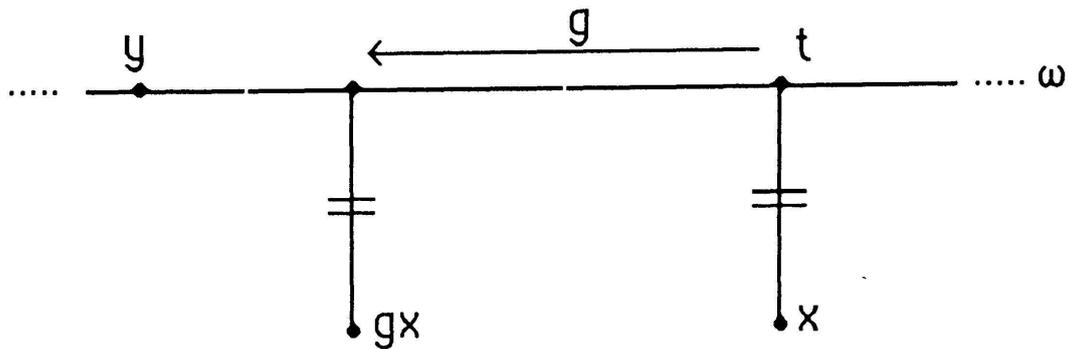
ii) Soit  $x$  le sommet apparaissant dans la définition de  $l_\omega$ . Soit d'abord  $g$  un élément elliptique de  $(\text{Aut } X)_\omega$ ; si  $y$  est un sommet dans  $X^g$ , la demi-droite  $[y, \omega[$  est fixée ponctuellement par  $g$ . Notons  $[t, \omega[$  la demi-droite  $[y, \omega[ \cap [x, \omega[ \cap [gx, \omega[$ . En calculant  $d_\omega(gx, x)$  par rapport à  $t$ , on a:

$$\begin{aligned} l_\omega(g) &= d(gx, t) - d(x, t) \\ &= d(gx, gt) - d(x, t) \quad \text{car } gt = t \\ &= 0 \end{aligned}$$



Soit maintenant  $g$  un élément hyperbolique de  $(\text{Aut } X)_\omega$ ; si  $y$  est un sommet sur l'axe de  $g$ , la demi-droite  $[y, \omega[$  est contenue dans l'axe de  $g$ . Notons à nouveau  $[t, \omega[$  la demi-droite  $[y, \omega[ \cap [x, \omega[ \cap [gx, \omega[$ . En calculant  $d_\omega(gx, x)$  par rapport à  $t$ , on a:

$$\begin{aligned} l_\omega(g) &= d(gx, t) - d(x, t) \\ &= \begin{cases} -l(g) & \text{si } g \text{ pointe vers } \omega \\ l(g) & \text{si } g^{-1} \text{ pointe vers } \omega \end{cases} \end{aligned}$$



iii) La continuité de  $l_\omega$  est claire. Si  $g, h \in (\text{Aut } X)_\omega$ , on a pour tout sommet  $x$  de  $X$ :

$$l_\omega(gh) = d_\omega(ghx, x) = d_\omega(ghx, hx) + d_\omega(hx, x) \quad (\text{par la relation } (*))$$

$$= l_\omega(g) + l_\omega(h)$$

puisque  $l_\omega(g)$  peut se calculer grâce à n'importe quel sommet de  $X$ . Ceci termine la preuve du lemme 4.

Si  $\alpha$  et  $\omega$  sont deux bouts distincts de l'arbre  $X$ , il existe une unique droite de  $X$ , notée  $] \alpha, \omega [$ , telle que pour tout sommet  $x$  sur cette droite, on ait:

$$] \alpha, \omega [ = [x, \alpha [ \cup [x, \omega [$$

On note  $(\text{Aut } X)_{\{\alpha, \omega\}}$  le stabilisateur de la paire  $\{\alpha, \omega\}$  dans  $\text{Aut } X$ , qu'on munit toujours de la topologie de la convergence simple. Le groupe  $(\text{Aut } X)_{\{\alpha, \omega\}}$  laisse invariant la droite  $] \alpha, \omega [$ . On a donc un homomorphisme de restriction  $r_{\alpha\omega}$  de  $(\text{Aut } X)_{\{\alpha, \omega\}}$  dans le groupe des automorphismes de la droite  $] \alpha, \omega [$ , qui est le groupe diédral infini  $D_\infty$ . Cet automorphisme

$$r_{\alpha\omega}: (\text{Aut } X)_{\{\alpha, \omega\}} \rightarrow D_\infty$$

est évidemment continu.

On note  $\bar{X}$  la réunion disjointe de  $X$  et de  $\Omega(X)$ :

$$\bar{X} = X \amalg \Omega(X)$$

Pour  $x, y$  sommets distincts de  $X$ , on pose:

$$V_{xy} = \{z \in X: y \in [x, z]\} \cup \{\omega \in \Omega(X): y \in [x, \omega]\}$$

On munit  $\bar{X}$  de la topologie dont une base est formée des  $V_{xy}$  ainsi que des parties finies de  $X$ ; l'espace  $\bar{X}$  devient ainsi un espace topologique séparé, dans lequel  $X$  est une partie discrète, ouverte, et dense. En fait, si  $T$  est un sous-arbre de  $X$ , son adhérence  $\bar{T}$  dans  $\bar{X}$  est la réunion de  $T$  et des bouts de  $T$ . Les  $V_{xy}$  sont à la fois ouverts et fermés dans  $\bar{X}$ , qui est totalement

discontinu. Si  $X$  est localement fini, l'espace  $\bar{X}$  est compact, et fournit ainsi une compactification de l'arbre  $X$ . Enfin, les actions de  $\text{Aut } X$  sur  $X$  et  $\Omega(X)$  se «recollent» en une action par homéomorphismes sur  $\bar{X}$ . Le lemme suivant est encore dû à Tits ([T3], Lemma 1.6).

LEMME 5. *Soit  $(T_i)_{i \in I}$  une famille de sous-arbres de l'arbre  $X$ , qui se rencontrent deux à deux. Alors  $\bigcap_{i \in I} \bar{T}_i$  est non vide.*

*Preuve.* Supposons d'abord l'arbre  $X$  localement fini. Le lemme 1 montre alors que la famille  $(\bar{T}_i)_{i \in I}$  de fermés de  $\bar{X}$  a la propriété d'intersection finie non vide, et la compacité de  $\bar{X}$  permet de conclure. Pour ramener le cas général au cas localement fini, nous utilisons un argument de la preuve originale de Tits. Soit  $x$  un sommet fixé dans  $X$ . Notons  $[x, t_i]$  le pont qui joint  $\{x\}$  à  $T_i$ . Pour  $i, j \in I$ , on voit facilement qu'on a  $[x, t_i] \subseteq [x, t_j]$  ou  $[x, t_i] \supseteq [x, t_j]$ , car  $T_i \cap T_j$  est non vide. Donc  $S = \bigcup_{i \in I} [x, t_i]$  est un segment géodésique ou une demi-droite, et de plus les sous-arbres de la famille  $(S \cap T_i)_{i \in I}$  se rencontrent deux à deux. Comme  $S$  est localement fini, on conclut.

## 2. PREUVE DE L'IMPLICATION (i) $\Rightarrow$ (ii) DU THÉORÈME

Nous scindons la preuve de l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) en trois propositions qui, ensemble, la démontrent.

PROPOSITION 1. *Soient  $X$  un arbre, et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut } X$ . Si  $G$  ne fixe aucun sommet, aucune arête, et aucun bout de  $X$ , alors  $G$  contient une translation.*

PROPOSITION 2. *Soient  $X$  un arbre, et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut } X$  contenant une translation. Si  $G$  ne fixe aucun bout et aucune paire de bouts de  $X$ , alors  $G$  contient deux translations d'axes disjoints.*

PROPOSITION 3. *Soient  $a, b$  deux translations d'axes disjoints dans un arbre  $X$ . Le sous-groupe  $H = \langle a, b \rangle$  engendré par  $a$  et  $b$  est libre sur les deux générateurs  $a, b$ ; de plus  $H$  agit librement sur  $X$ .*

*Remarques.* 1) Les trois propositions ci-dessus montrent que l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) du Théorème est en fait vraie pour tout arbre, sans hypothèse

de locale finitude. Nous verrons au § 6 qu'il en est de même pour l'implication réciproque.

2) La proposition 1 est due à Tits ([T1], Proposition 3.4; voir aussi [Ti], Proposition 2.4, pour le cas des arbres réels). La proposition 2 est de Culler et Morgan ([CM], Lemma 2.1). La première partie de la proposition 3 est due à Hausmann ([Ha], Proposition 3.5); elle apparaît aussi, comme d'ailleurs la proposition 2, dans une preuve de Nebbia ([N2], p. 373). La seconde partie de la proposition 3 a été obtenue par Culler et Morgan ([CM], Lemma 2.6) avec une preuve très différente de la nôtre.

### 2.a. PREUVE DE LA PROPOSITION 1

Nous allons montrer que, si le sous-groupe  $G$  de  $\text{Aut } X$  ne contient pas de translation, alors  $G$  agit sur l'arbre  $X$  en fixant ou un sommet, ou une arête, ou un bout de  $X$ .

Nous commençons par utiliser une astuce standard pour pouvoir supposer que  $G$  ne contient pas d'inversion: pour cela, nous considérons le premier subdivisé barycentrique  $Y$  de  $X$ , c'est-à-dire l'arbre  $Y$  obtenu en ajoutant un sommet en chaque milieu d'arête de  $X$ . Il est clair que  $G$  peut être vu comme sous-groupe de  $\text{Aut } Y$ , et que  $G$  ne contient pas d'inversion de  $Y$ . Notre hypothèse entraîne donc que  $G$  consiste exclusivement en rotations de  $Y$ . Le lemme 2 montre que, quels que soient les éléments  $g, h$  de  $G$ , les sous-arbres  $Y^g$  et  $Y^h$  se rencontrent. Considérons l'action de  $G$  sur  $\bar{Y} = Y \coprod \Omega(Y)$ , et remarquons que  $\Omega(Y)$  s'identifie canoniquement à  $\Omega(X)$ . Le lemme 5 montre alors que  $\bigcap_{g \in G} \bar{Y}^g \neq \emptyset$ . En d'autres termes,  $G$  possède un point fixe dans  $\bar{Y}$ ; ce point fixe correspond soit à un sommet de  $X$ , soit à une arête de  $X$ , soit à un bout de  $X$ . La preuve est donc terminée.

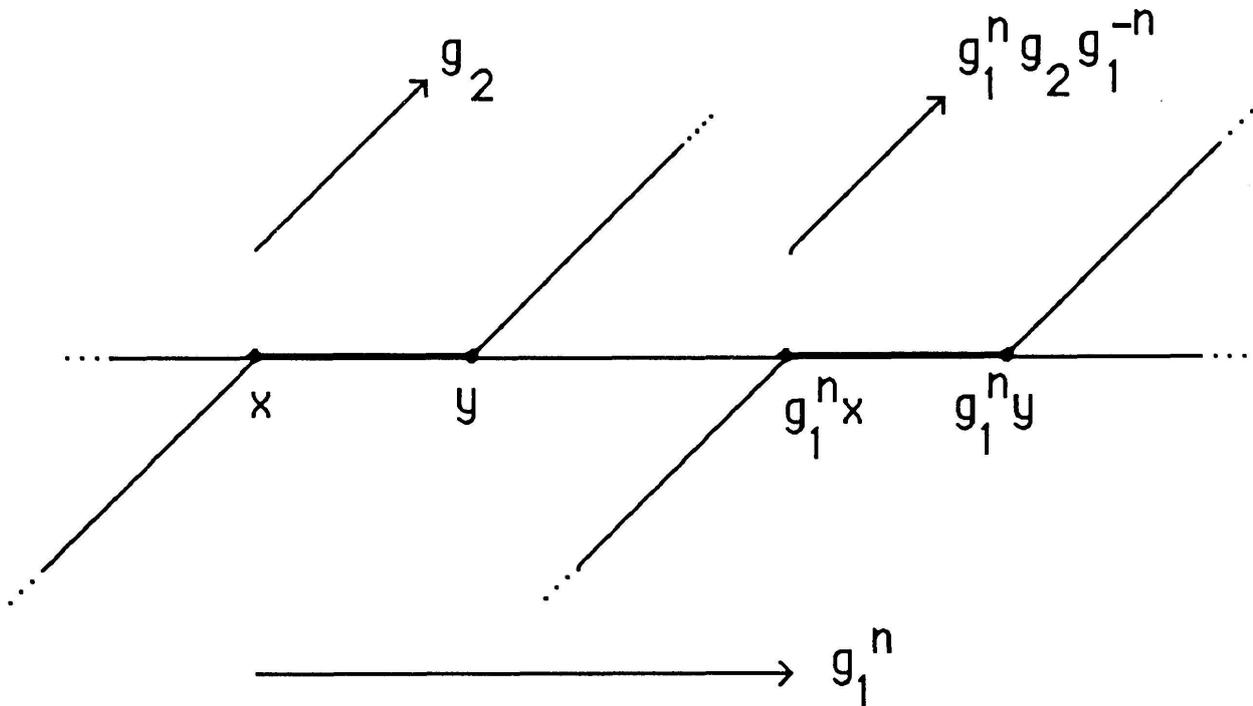
*Remarque.* Jointe au lemme 1, la première partie du raisonnement ci-dessus permet de retrouver le fait que, si  $G$  est un sous-groupe finiment engendré de  $\text{Aut } X$  ne contenant pas de translation, alors  $G$  fixe un sommet ou une arête de  $X$  (voir [Se], Corollaire 3 de I.6.5; [T3], 2.2.3).

### 2.b. PREUVE DE LA PROPOSITION 2

Nous dirons que deux translations d'un arbre sont *transverses* si l'intersection de leurs axes est finie.

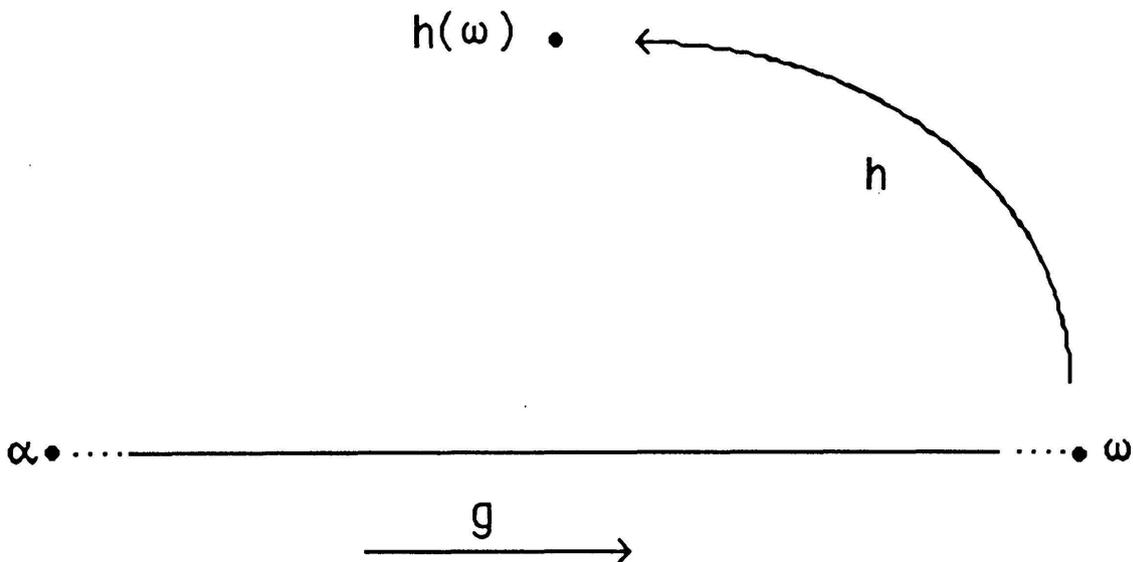
LEMME 6. *Soient  $g_1, g_2$  deux translations transverses; le sous-groupe  $\langle g_1, g_2 \rangle$  de  $\text{Aut } X$  engendré par  $g_1$  et  $g_2$  contient alors deux translations d'axes disjoints.*

*Preuve.* Si les axes de  $g_1$  et  $g_2$  sont disjoints, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que l'intersection de ces deux axes soit une géodésique  $[x, y]$ . Pour  $|n|$  assez grand,  $[x, y]$  et  $[g_1^n x, g_1^n y]$  sont disjoints.



Donc  $g_2$  et  $g_1^n g_2 g_1^{-n}$  sont des translations d'axes disjoints. Ceci termine la preuve du lemme 6.

Passons maintenant à la preuve de la proposition 2. Soit  $g$  une translation dans  $G$ ; notons  $]\alpha, \omega[$  son axe. Nous utiliserons constamment le fait que, si  $h \in G$ , alors  $hgh^{-1}$  est une translation d'axe  $]h(\alpha), h(\omega)[$ . Comme  $G$  ne fixe aucune paire de bouts de  $X$ , il existe  $h \in G$  tel que  $\{h(\alpha), h(\omega)\} \neq \{\alpha, \omega\}$ . Quitte à permuter les rôles de  $\alpha$  et  $\omega$ , on peut supposer  $h(\omega) \notin \{\alpha, \omega\}$ .

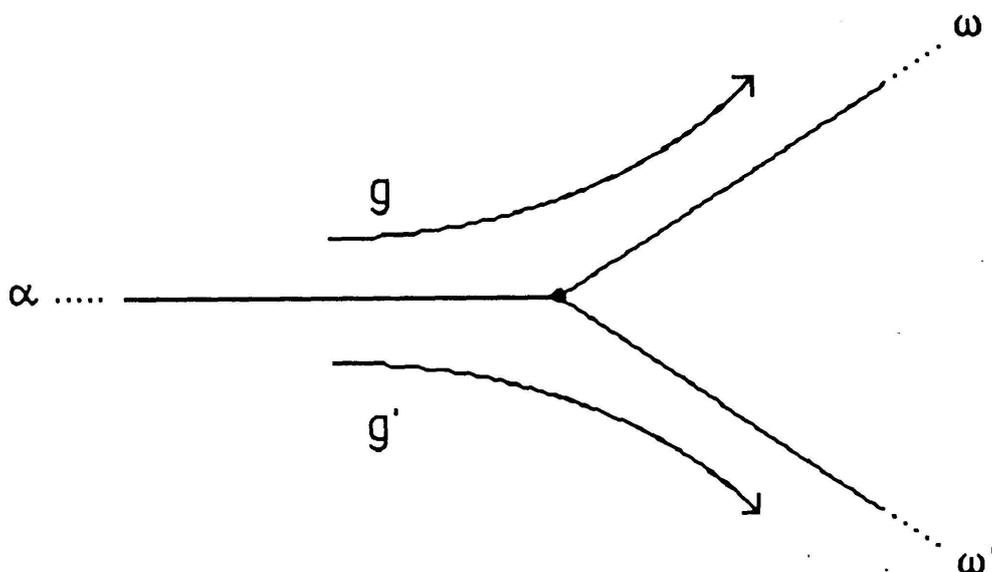


On distingue alors trois cas :

1)  $h(\alpha) \notin \{\alpha, \omega\}$ . Dans ce cas,  $g$  et  $hgh^{-1}$  sont transverses, et on applique le lemme 6.

2)  $h(\alpha) = \omega$ . Posons  $h' = gh$ ; donc  $h(\alpha) = h'(\alpha) = \omega$ . En utilisant le fait que  $\alpha$  et  $\omega$  sont les seuls points fixes de  $g$  dans  $\Omega(X)$ , on voit que les bouts  $\alpha, \omega, h(\omega), h'(\omega)$  sont deux à deux distincts, et qu'on ne peut avoir simultanément  $h^2(\omega) = \alpha$  et  $h'^2(\omega) = \alpha$ . Donc l'une au moins des intersections  $\{\alpha, \omega\} \cap \{h^2(\alpha), h^2(\omega)\}$  et  $\{\alpha, \omega\} \cap \{h'^2(\alpha), h'^2(\omega)\}$  est vide. En d'autres termes, ou bien  $g$  et  $h^2gh^{-2}$  sont transverses, ou bien  $g$  et  $h'^2gh'^{-2}$  sont transverses.

3)  $h(\alpha) = \alpha$ . Posons alors  $\omega' = h(\omega)$ , et  $g' = hgh^{-1}$ . Nous voulons considérer  $g$  et  $g'$  de manière symétrique.



Comme  $G$  ne fixe aucun bout de  $X$ , il existe  $k \in G$  tel que  $k(\alpha) \neq \alpha$ . En faisant quelques dessins, il est facile de voir que, parmi les quatre droites  $]\alpha, \omega[, ]\alpha, \omega'[, ]k(\alpha), k(\omega)[, ]k(\alpha), k(\omega')[,$  on peut en trouver deux dont l'intersection est finie. Cela veut dire que, parmi les quatre translations  $g, g', kgk^{-1}, kg'k^{-1}$ , deux au moins sont transverses. Le lemme 6 permet une dernière fois de conclure.

## 2.c. PREUVE DE LA PROPOSITION 3

Nous commençons par un raffinement du «lemme du ping-pong» (voir [T2], Proposition 1.1; [H1], p. 130; [Ha], Proposition 3.1).

LEMME 7. Soit  $E$  un ensemble dans lequel on s'est donné deux sous-ensembles disjoints  $A$  et  $B$ ; soient  $a, b$  deux permutations de  $E$ . Notons  $A'$  (resp.  $B'$ ) l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'orbite sous  $\langle a \rangle$  (resp.  $\langle b \rangle$ ) est contenue dans  $A$  (resp.  $B$ ); notons encore  $Y$  le complémentaire de  $A \cup B$  dans  $E$ , et  $F$  la plus petite partie de  $E$  invariante sous  $H = \langle a, b \rangle$ , et contenant  $A' \cup B' \cup Y$ . On fait les hypothèses suivantes:

α)  $A'$  et  $B'$  sont non vides, et l'action de  $\langle a \rangle$  (resp.  $\langle b \rangle$ ) sur  $A'$  (resp.  $B'$ ) est libre;

β) Pour tout  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ :  $a^m(B \cup Y) \subseteq A$  et  $b^m(A \cup Y) \subseteq B$ .

Alors le groupe  $H$  est libre sur les deux générateurs  $a$  et  $b$ ; de plus  $H$  agit librement sur  $F$ .

*Preuve du lemme 7.* Nous allons démontrer simultanément les deux assertions, en remarquant pour la seconde qu'il suffit de montrer que tout élément  $x$  de  $A' \cup B' \cup Y$  a un stabilisateur trivial dans  $H$ . Soit donc  $w$  un élément de  $H$  qui s'écrit comme un mot non trivial en  $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ . Il y a trois cas à considérer.

1)  $x \in A'$ : on peut supposer vu l'hypothèse (α) que  $w$  n'est pas une puissance de  $a$ ; on considère alors quatre sous-cas:

a)  $w$  commence et finit par une puissance de  $b$ ; du fait de l'hypothèse (β):  $wx \in B$ , et en particulier  $wx \neq x$ .

b)  $w$  commence par une puissance de  $b$  et finit par une puissance de  $a$ . On peut donc écrire  $w = ha^m$ , où  $h$  est comme en a). Comme  $a^m x \in A'$ , on a  $wx = ha^m x \in B$ , donc  $wx \neq x$ .

c)  $w$  commence par une puissance de  $a$  et finit par une puissance de  $b$ . Alors  $w^{-1}$  est comme en b), et par conséquent  $w^{-1}x \neq x$ , donc  $wx \neq x$ .

d)  $w$  commence et finit par une puissance de  $a$ . On peut écrire  $w = a^n g$ , avec  $g$  comme en b). Si on avait  $wx = x$ , on aurait  $gx = a^{-n}x$ , ce qui est absurde puisque  $gx \in B$  et  $a^{-n}x \in A'$ .

On a en particulier montré que  $w \neq 1$  si  $w$  est un mot non trivial en  $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ ; donc  $H$  est libre sur les deux générateurs  $a$  et  $b$ .

2)  $x \in B'$ : ce cas est symétrique du cas 1).

3)  $x \in Y$ : on a  $wx \in A$  (resp.  $wx \in B$ ) si  $w$  commence par une puissance de  $a$  (resp.  $b$ ); *a fortiori*  $wx \neq x$ . Ceci termine la preuve du lemme 7.

Pour démontrer la proposition 3, considérons le pont  $[p, q]$  qui joint l'axe de  $a$  à l'axe de  $b$ , et considérons la partition de  $X$  associée à  $[p, q]$ :

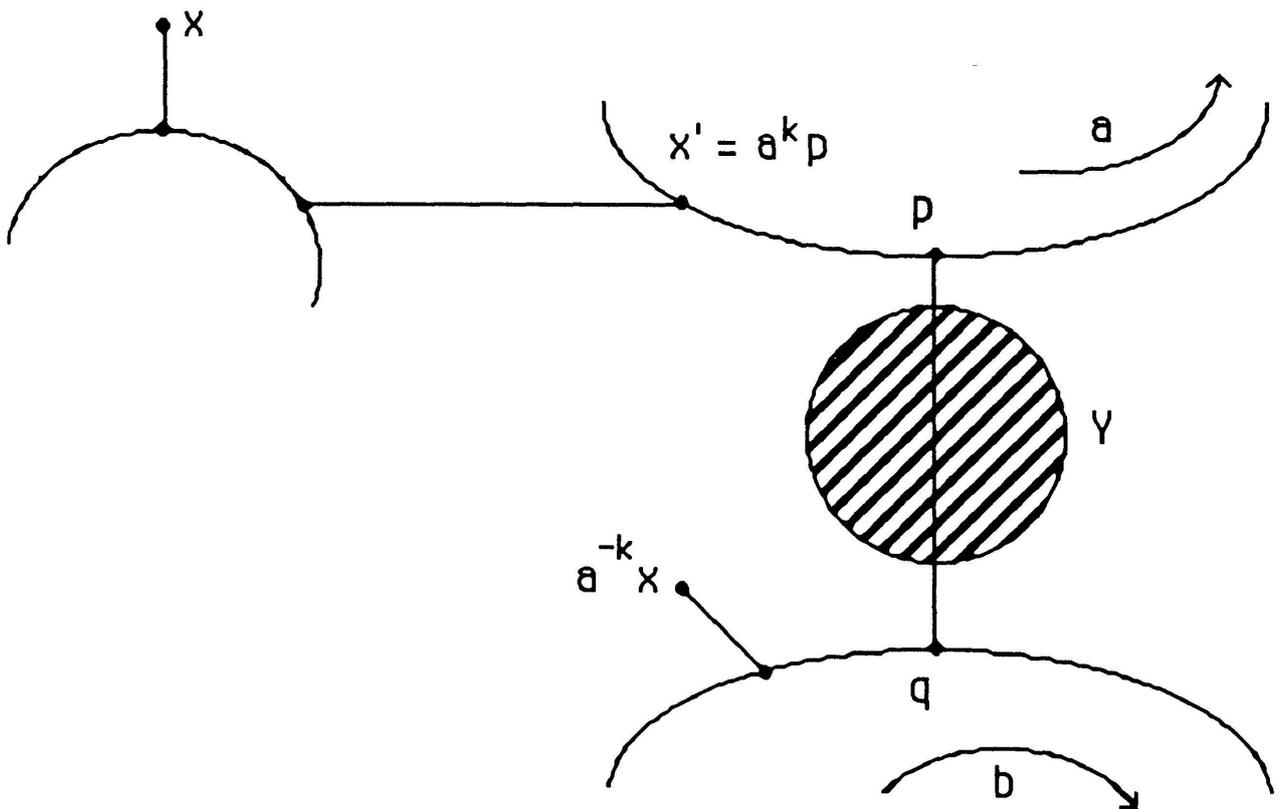
$$A = f_{pq}^{-1}\{p\}; \quad B = f_{pq}^{-1}\{q\}; \quad Y = X - (A \cup B)$$

(où  $f_{pq}$  est définie comme au § 1). Nous allons appliquer le lemme 7 à cette partition de  $X$ . Remarquons que  $A'$  est non vide, puisque  $A'$  contient l'axe de  $a$ ; il en va symétriquement pour  $B$ . Les autres hypothèses du lemme 7 se vérifient immédiatement, et le lemme 7 s'applique donc pour montrer que  $H = \langle a, b \rangle$  est un groupe libre sur les deux générateurs  $a$  et  $b$ , agissant librement sur la partie  $F$  qui est le saturé par  $H$  de  $A' \cup B' \cup Y$ . Il reste à montrer que  $F = X$ .

Choisissons pour cela un réel  $r$  tel que  $0 < r \leq \min\{l(a), l(b)\}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , appelons  $C_n$  l'ensemble des sommets de  $X$  dont la distance à  $Y \cup [p, q]$  est inférieure ou égale à  $nr$ , et montrons par récurrence sur  $n$  que  $C_n$  est contenu dans  $F$ , le cas  $n = 0$  étant clair. Soient donc  $n > 0$ , et  $x$  un sommet dans  $C_n$ ; vu la symétrie entre  $A$  et  $B$ , on peut supposer que  $x$  est dans  $A$ . Soit  $[x, x']$  le pont qui joint  $\{x\}$  à l'axe de  $a$ . Si  $x'$  n'est pas dans l'orbite de  $p$  sous  $\langle a \rangle$ , ou si  $x' = p$ , alors  $x$  est dans  $A'$ , donc dans  $F$ . Supposons donc  $x' = a^k p$ , avec  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , et considérons le sommet  $a^{-k}x$ , qui est dans  $A' \cup B \cup Y$ . Si  $a^{-k}x \in A' \cup Y$ , alors  $x \in F$ ; si  $a^{-k}x \in B$  (cas illustré ci-dessous), alors la distance de  $a^{-k}x$  à  $Y \cup [p, q]$  est la distance de  $a^{-k}x$  à  $q$ , et

$$d(a^{-k}x, q) < d(x, p) - d(x', p) = d(x, p) - |k| \cdot l(a) \leq (n - 1)r$$

Ainsi  $a^{-k}x$  est dans  $C_{n-1}$ , et l'hypothèse de récurrence permet de conclure.



*Remarque.* Si l'arbre  $X$  est localement fini, on peut donner une preuve différente du fait que  $H$  agit librement sur  $X$ . Grâce au lemme 7, on sait déjà que  $H$  est libre et qu'il existe au moins un sommet dont le stabilisateur dans  $H$  soit trivial (prendre par exemple un sommet sur l'axe de  $a$ ). Par le lemme 3,  $H$  est un sous-groupe discret de  $\text{Aut } X$ . Si  $x$  est un sommet quelconque, le sous-groupe  $H \cap (\text{Aut } X)_x$  est discret dans le groupe compact  $(\text{Aut } X)_x$ , donc  $H \cap (\text{Aut } X)_x$  est fini. Comme  $H$  est libre,  $H \cap (\text{Aut } X)_x$  est trivial.

### 3. PREUVES DES IMPLICATIONS (ii) $\Rightarrow$ (iii) ET (iii) $\Rightarrow$ (iv) DU THÉORÈME MOYENNABILITÉ

L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii) résulte immédiatement du lemme 3. Nous donnons maintenant quelques rappels sur la moyennabilité qui rendront évidente l'implication (iii)  $\Rightarrow$  (iv).

Soit  $G$  un groupe localement compact. On dit que  $G$  est *moyennable* si, chaque fois que  $G$  opère de manière affine et continue sur un convexe compact non vide  $C$  dans un espace vectoriel topologique localement convexe, il existe dans  $C$  un point fixe pour l'action de  $G$ . Comme références sur la moyennabilité, nous recommandons la petite monographie de Greenleaf [Gl], le livre de Paterson [Pa], et l'article remarquable d'efficacité d'Eymard [Ey]; à propos de la moyennabilité des groupes discrets, l'article original de von Neumann [vN] vaut la peine d'être lu; pour l'évolution historique de la notion, on consultera avec profit le livre de Pier ([Pi], Chapitre 9). Nous rassemblons maintenant sans démonstration quelques faits classiques sur la moyennabilité.

MOY A: Un groupe abélien est moyennable (c'est le théorème de Markoff-Kakutani, voir [Bo], Appendice du Chapitre IV).

MOY B: La moyennabilité est préservée par extensions; en d'autres termes, si  $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 1$  est une suite exacte courte de groupes localement compacts avec  $N$  et  $G/N$  moyennables, alors  $G$  est moyennable (voir [Ey], II.1; [Gl], Theorem 2.3.3).

MOY C: La moyennabilité est préservée par limites inductives (voir [Gl], Theorem 2.3.4).

MOY D: Un groupe compact est moyennable.

MOY E: Un sous-groupe fermé d'un groupe moyennable est moyennable (voir [Ey], IV; [Gl], Theorem 2.3.2).

MOY F: Un groupe libre non abélien (avec la topologie discrète) n'est pas moyennable (voir [Ey], II.4; [Gl], exemple 1.2.3; [vN], §5 de l'Introduction).

L'implication (iii)  $\Rightarrow$  (iv) du théorème est alors une conséquence immédiate de MOY E et MOY F.

#### 4. PREUVE DE L'IMPLICATION (iv) $\Rightarrow$ (i) DU THÉORÈME

Nous allons montrer que, si  $X$  est un arbre localement fini, les stabilisateurs dans  $\text{Aut } X$  d'un sommet, d'une arête, d'un bout, ou d'une paire de bouts de  $X$ , sont des sous-groupes fermés moyennables.

— *Stabilisateur d'un sommet*: Si  $x$  est un sommet,  $(\text{Aut } X)_x$  est un sous-groupe compact, donc moyennable par MOY D.

— *Stabilisateur d'une arête*: Si  $[x, y]$  est une arête, nous notons  $(\text{Aut } X)_{[x, y]}$  son stabilisateur dans  $\text{Aut } X$ . Le sous-groupe compact ouvert  $(\text{Aut } X)_x \cap (\text{Aut } X)_y$  est d'indice 2 ou 1 dans  $(\text{Aut } X)_{[x, y]}$  (selon qu'il existe une inversion conservant  $[x, y]$  ou pas). Par conséquent  $(\text{Aut } X)_{[x, y]}$  est lui-même compact, donc moyennable.

— *Stabilisateur d'un bout*: Soit  $\omega$  un bout de  $X$ ; considérons l'homomorphisme  $l_\omega: (\text{Aut } X)_\omega \rightarrow \mathbf{Z}$  fourni par le lemme 4 (iii); comme  $\mathbf{Z}$  est moyennable ainsi que ses sous-groupes (par MOY A), il suffit par MOY B de vérifier que le noyau  $\text{Ker } l_\omega$  est moyennable. Pour cela, observons que la famille de sous-groupes compacts  $((\text{Aut } X)_\omega \cap (\text{Aut } X)_x)_{x \in X}$  forme un système dirigé: si  $x, y$  sont des sommets quelconques de  $X$ , et  $z$  un sommet sur  $[x, \omega[ \cap [y, \omega[$ , on a:

$$((\text{Aut } X)_\omega \cap (\text{Aut } X)_x) \cup ((\text{Aut } X)_\omega \cap (\text{Aut } X)_y) \subseteq (\text{Aut } X)_\omega \cap (\text{Aut } X)_z$$

puisque  $(\text{Aut } X)_\omega \cap (\text{Aut } X)_x$  fixe ponctuellement la demi-droite  $[x, \omega[$ . La limite inductive de ce système est l'ensemble des rotations dans  $(\text{Aut } X)_\omega$ , qui coïncide avec  $\text{Ker } l_\omega$  par le lemme 4 (ii). Le groupe  $\text{Ker } l_\omega$  est limite inductive de groupes compacts, il est donc moyennable par MOY C.

— *Stabilisateur d'une paire de bouts*: Soit  $\{\alpha, \omega\}$  une paire de bouts de  $X$ ; considérons l'homomorphisme  $r_{\alpha\omega}: (\text{Aut } X)_{\{\alpha, \omega\}} \rightarrow D_\infty$  introduit vers la fin du §1. Comme  $D_\infty$  est un groupe résoluble, tous ses sous-groupes sont moyennables, et il suffit par MOY B de vérifier que le noyau  $\text{Ker } r_{\alpha\omega}$  est moyennable; mais ce noyau est  $\bigcap_{x \in ]\alpha, \omega[} ((\text{Aut } X)_{\{\alpha, \omega\}} \cap (\text{Aut } X)_x)$ , qui est compact.

## 5. QUELQUES COROLLAIRES DU THÉORÈME

Les trois premiers corollaires sont quasiment immédiats. Le premier est un résultat assez connu de Tits ([T3], 3.4 et 2.3.6); les deux suivants sont dûs à Nebbia ([N2], Théorème 2 et Remarque 3, p. 375).

**COROLLAIRE 1.** *Soient  $X$  un arbre, et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut } X$  contenant un sous-groupe résoluble d'indice fini. Alors  $G$  fixe un sommet, ou une arête, ou un bout, ou une paire de bouts de  $X$ .*

*Preuve.* Vu les hypothèses,  $G$  ne peut contenir de sous-groupe libre non abélien. Le résultat provient alors de l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) du Théorème, vraie sans hypothèse de locale finitude de  $X$  (voir la remarque 1 du §2).

**COROLLAIRE 2.** *Soit  $X_N$  l'arbre homogène de degré  $N$ , où tout sommet a exactement  $N$  voisins ( $3 \leq N < \infty$ ); soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut } X_N$  agissant transitivement sur  $X_N$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $G$  fixe un bout de  $X_N$ ;
- (ii) L'adhérence  $\bar{G}$  de  $G$  dans  $\text{Aut } X_N$  est moyennable.

*Preuve.* Comme  $G$  agit transitivement,  $G$  ne peut fixer aucun sommet, aucune arête, et aucune paire de bouts de  $X_N$  (on utilise  $N \geq 3$  pour ce dernier point). L'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (iv) du Théorème permet de conclure.

**COROLLAIRE 3.** *Soient  $X$  un arbre localement fini, et  $G$  un sous-groupe fermé de  $\text{Aut } X$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $G$  n'est pas moyennable;
- (ii)  $G$  contient un sous-groupe discret qui est libre non abélien.

*Preuve.* Immédiate.

Nous mentionnons le corollaire 3 du fait de ses liens avec un problème classique: si  $\mathcal{C}$  est une classe de groupes localement compacts, la non-moyennabilité d'un groupe  $G$  de  $\mathcal{C}$  est-elle due à la présence dans  $G$  d'un sous-groupe discret qui est libre non abélien? Une conjecture fort répandue sous le nom de «conjecture de von Neumann»<sup>6)</sup> affirmait que la réponse devait être affirmative pour la classe  $\mathcal{C}$  des groupes discrets: rappelons que Ol'shanskii [Ol] a donné les premiers exemples de groupes discrets qui

<sup>6)</sup> Nous n'avons trouvé dans l'article «Zur allgemeinen Theorie der Massen» de von Neumann [vN], qu'un seul passage qui semble se rapporter au problème qui nous occupe. Au §4 de son *Einleitung*, von Neumann énonce quatre principes générateurs pour la classe des groupes moyennables discrets: il s'agit de la version discrète des principes MOYA,

montrent que la réponse est négative pour cette classe; plus récemment Gromov a construit une infinité non dénombrable de tels exemples (voir [Gr], Corollary 5.5.E; [GH], Théorème 7 du Chapitre 12). Par contre, la réponse au problème est affirmative pour la classe  $\mathcal{C}$  des groupes discrets linéaires: c'est une conséquence banale du théorème de Tits mentionné tout au début du présent article. Comme autre résultat positif, citons la réponse affirmative au problème pour la classe  $\mathcal{C}$  des groupes localement compacts presque connexes (c'est-à-dire dont le quotient par la composante connexe du neutre est compact): c'est un résultat de Rickert [Ri] (voir aussi la page 132 de [H1] pour le cas des groupes de Lie presque connexes). Le corollaire 3 ci-dessus montre que la réponse au problème est encore affirmative pour la classe  $\mathcal{C}$  des sous-groupes fermés des groupes d'automorphismes d'arbres localement finis.

**COROLLAIRE 4.** *Soient  $X$  un arbre, et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Aut } X$ . On suppose que  $G$  n'a qu'un nombre fini d'orbites sur les sommets de  $X$ , et que tout sommet de  $X$  a un stabilisateur fini dans  $G$ . On a alors l'alternative suivante: ou bien  $G$  est fini, ou bien  $G$  contient un sous-groupe cyclique infini d'indice fini, ou bien  $G$  contient un sous-groupe libre non abélien.*

*Preuve.* Supposons que  $G$  ne contienne pas de sous-groupe libre non abélien. L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) du Théorème (vraie sans hypothèse de locale finitude de  $X$ ) conduit à considérer quatre cas, comme au §4 ci-dessus.

—  *$G$  fixe un sommet  $x$ :* Alors le groupe  $G$  et l'arbre  $X$  sont finis, comme conséquences immédiates des hypothèses.

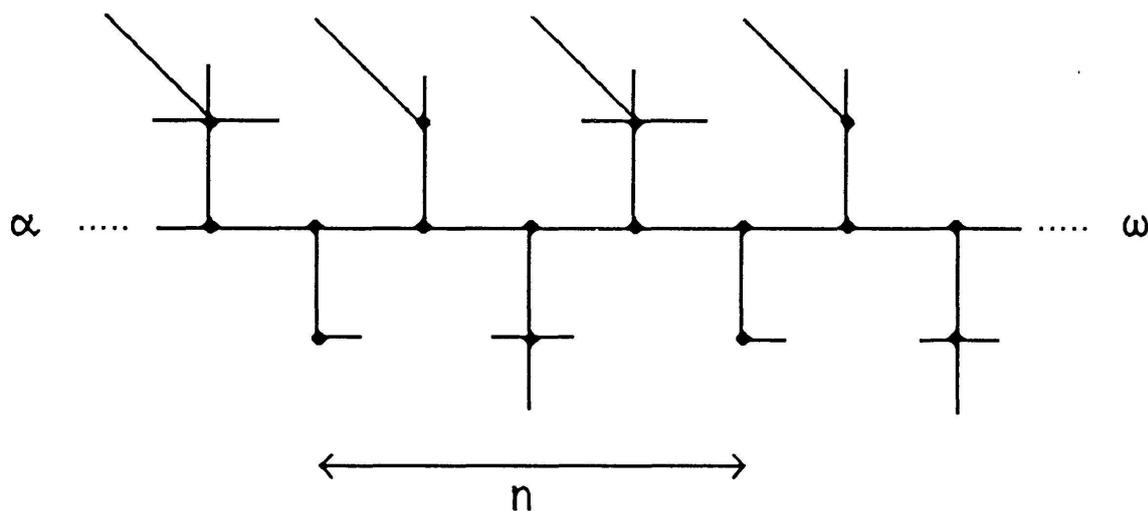
—  *$G$  fixe une arête  $[x, y]$ :* Le sous-groupe  $G \cap (\text{Aut } X)_x \cap (\text{Aut } X)_y$  est alors d'indice 1 ou 2 dans  $G$ , et est justiciable du cas précédent. A nouveau,  $G$  et  $X$  sont finis.

—  *$G$  fixe un bout  $\omega$ :* Le raisonnement fait au §4 montre que  $G \cap \text{Ker } l_\omega$  est la limite inductive du système dirigé de groupes finis  $(G \cap (\text{Aut } X)_x)_{x \in X}$ , dont les ordres sont uniformément bornés sur  $X$ , vu les hypothèses. Donc

---

MOY B, MOY C, MOY D que nous avons énoncés dans notre §3. Au §6 de son introduction, von Neumann a ce commentaire: «*Jetzt dürfen wir wohl sagen: es kommt nur auf die Eigenschaften der (abstrakten) Gruppe  $G$  an. Denn der gewünschte allgemeine Maßbegriff ist (unter den betrachteten Verhältnissen) sicher vorhanden, wenn sie mit Hilfe der Erzeugungs-Prinzipien A.-D. in §4 gewonnen werden kann, und er existiert bestimmt nicht, wenn  $G$  eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden  $\sigma, \tau$  enthält [...].*» Ceci suggère que von Neumann avait le problème en tête, sans qu'il prenne la peine de l'explicitement; mais il nous paraît abusif de lui attribuer une conjecture allant dans un sens ou l'autre. D'après [Pi], pp. 248-249, Day est le premier à avoir posé le problème pour la classe des groupes discrets; et en effet, l'énoncé apparaît explicitement à la dernière ligne du §4 de [Da]; mais Day n'en fait pas non plus une conjecture.

$G \cap \text{Ker } l_\omega$  est un groupe fini. On ne peut avoir  $G = G \cap \text{Ker } l_\omega$ , qui impliquerait que  $G$  soit fini, et contredirait la finitude du nombre d'orbites de  $G$  sur les sommets. Donc  $l_\omega(G)$  est un groupe cyclique infini, et  $G$  contient un sous-groupe cyclique infini d'indice fini. On voit facilement que, dans ce cas, l'arbre  $X$  possède une unique droite  $] \alpha, \omega [$  le long de laquelle sont attachés des arbres finis qui se répètent périodiquement (avec une période  $n$  si  $l_\omega(G) = n\mathbb{Z}$ ).



—  $G$  fixe une paire de bouts  $\{\alpha, \omega\}$ : Comme  $G$  n'a qu'un nombre fini d'orbites sur les sommets de la droite  $] \alpha, \omega [$ , on voit que  $r_{\alpha\omega}(G)$  est un sous-groupe infini du groupe  $D_\infty$ . Donc  $r_{\alpha\omega}(G)$  contient un sous-groupe infini cyclique d'indice fini. D'autre part,  $G \cap \text{Ker } r_{\alpha\omega}$  coïncide avec  $\bigcap_{x \in ] \alpha, \omega [} (G \cap (\text{Aut } X)_x)$ , qui est un groupe fini par hypothèse. Donc  $G$  lui-même contient un sous-groupe infini cyclique d'indice fini. L'allure de l'arbre  $X$  est la même qu'au cas précédent.

*Remarques.* 1) On peut démontrer différemment le corollaire 4 quand l'arbre est localement fini. En effet, du fait des hypothèses,  $G$  est alors un groupe finiment engendré, et si  $d_S$  désigne la métrique sur  $G$  associée à une partie génératrice finie  $S$  de  $G$ , l'espace métrique  $(G, d_S)$  est quasi-isométrique à l'espace métrique  $(X, d)$  (pour ces assertions, voir [GH], Proposition 19 du Chapitre 4). L'espace  $(X, d)$  est un espace hyperbolique au sens de Gromov, et l'hyperbolicité est invariante par quasi-isométrie ([GH], Théorème 12 du Chapitre 5); donc  $G$  est un groupe hyperbolique au sens de Gromov, et la trichotomie annoncée est valable pour ces groupes ([Gr], §3.1; [GH], Théorème 37 du Chapitre 8).

2) En utilisant la théorie de Bass-Serre des groupes fondamentaux de graphes de groupes, Scott et Wall puis Bass et Kulkarni ont obtenu un résultat plus précis que le corollaire 4: sous les mêmes hypothèses, le groupe  $G$  contient

un sous-groupe libre d'indice fini sur zéro, un ou plusieurs générateurs (voir [SW], Theorem 7.3 et [BK], Corollary 2.8)<sup>7)</sup>.

## 6. LE CAS DES ARBRES RÉELS

Un *arbre réel* est un espace métrique entre deux points duquel passe un arc unique, qui est de plus isométrique à un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Ces objets ont été introduits par Tits [T3], sous le nom d'«arbres». Nous renvoyons à l'article original de Tits pour le rôle des arbres réels en algèbre, et aux travaux de Morgan-Shalen [MS], Culler-Morgan [CM] et Paulin [Pl] pour leur rôle en topologie. Notons qu'un arbre ordinaire peut être vu comme un arbre réel, en remplaçant chaque arête par une copie isométrique de l'intervalle  $[0, 1]$ , et en prolongeant la métrique  $d$  de manière évidente.

Une *demi-droite* (resp. *droite*) d'un arbre réel  $X$  est une image isométrique de la demi-droite  $[0, \infty[$  (resp. la droite  $\mathbf{R}$ ).

On note  $\text{Isom } X$  le groupe des isométries de l'arbre réel  $X$ . La classification des isométries est encore plus simple que pour un arbre ordinaire (voir [T3], 3.1; [MS], Theorem II.2.3). Les isométries sont de deux types:

— Les isométries qui fixent au moins un point. Il s'agit des isométries *elliptiques*, ou *rotations*.

— Les isométries qui ne fixent aucun point. Il s'agit des isométries *hyperboliques*, ou *translations*. Comme dans le cas des arbres ordinaires, une telle isométrie  $g$  possède une unique droite invariante, appelée *axe* de  $g$ , et le long de laquelle  $g$  agit par translation.

Un *bout* de l'arbre réel  $X$  est un élément de la limite projective

$$\lim_{\leftarrow} \pi_0(X - B)$$

où  $B$  parcourt les parties bornées fermées de  $X$ , et  $\pi_0(X - B)$  désigne l'espace des composantes connexes de  $X - B$  (voir [CM], §2; [C1], §1). Lorsque l'arbre réel  $X$  est complet, cette définition équivaut à celle de Tits ([T3], 1.1) analogue à celle que nous avons donnée au §1 en termes de classes d'équivalence de demi-droites<sup>8)</sup>. Si on le désire, on peut avec Tits ne considérer que des arbres réels complets: en effet la complétion d'un arbre réel est encore un arbre réel ([MS], Corollary II.1.10).

<sup>7)</sup> Notons  $X_\infty$  l'arbre homogène de degré infini, où tout sommet a une infinité dénombrable de voisins. Soit  $G$  un groupe discret opérant transitivement avec stabilisateurs finis sur  $X_\infty$ . Dans [V1], le second auteur construit des représentations uniformément bornées non unitarisables de  $G$ . L'existence de telles représentations implique la non-moyennabilité de  $G$ . Le corollaire 4 ou le résultat de Bass-Kulkarni donnent la raison de cette non-moyennabilité.

PROPOSITION 4. Soient  $X$  un arbre réel, et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Isom } X$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i)  $G$  ne fixe aucun point, aucun bout, et aucune paire de bouts de  $X$ ;
- (ii)  $G$  contient un sous-groupe libre non abélien qui agit librement et proprement discontinûment sur  $X$ .

*Preuve.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Nous avons pris soin, aux §§ 1-2, d'écrire la preuve de l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) du Théorème de manière à ce qu'elle s'adapte *mutatis mutandis* au cas des arbres réels. De plus, il est facile de vérifier à la proposition 3 que le groupe libre engendré par deux translations d'axes disjoints agit proprement discontinûment (voir la preuve de la proposition 3, ou le lemme 2.6 de [CM]).

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Montrons que, si  $G$  fixe un point, un bout ou une paire de bouts de  $X$ , alors  $G$  ne peut contenir de groupe libre non abélien agissant librement sur  $X$ . C'est clair si  $G$  fixe un point. Si  $G$  fixe un bout  $\omega$ , on fait la remarque suivante: si  $g_1, g_2$  sont deux translations dans  $G$ , l'intersection de leurs axes contient une demi-droite  $[x, \omega[$ . Quitte à remplacer  $g_i$  par  $g_i^{-1}$ , on peut supposer  $g_i[x, \omega[ \subseteq [x, \omega[$  ( $i = 1, 2$ ); alors  $g_1 g_2 x = g_2 g_1 x$ , donc  $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$  fixe  $x$ . Cette remarque montre que les seuls sous-groupes libres de  $G$  agissant librement sur  $X$  sont sur zéro ou un générateur. Enfin, si  $G$  fixe une paire de bouts  $\{\alpha, \omega\}$ , une translation dans  $G$  a pour axe la droite  $] \alpha, \omega [$ , donc deux translations dans  $G$  commutent. A nouveau, on voit que les seuls sous-groupes libres de  $G$  agissant librement sur  $X$  sont sur zéro ou un générateur.

Grâce à la proposition 4, on déduit immédiatement l'analogue pour les arbres réels du corollaire 1 du § 5: si  $X$  est un arbre réel, et  $G$  un sous-groupe de  $\text{Isom } X$  qui contient un sous-groupe résoluble d'indice fini, alors  $G$  fixe un point, un bout ou une paire de bouts de  $X$ . Rappelons que ce résultat est dû à Tits ([T3], 3.4 et 2.3.6).

AJOUTÉ SUR ÉPREUVES: Identifions  $PSL_2(\mathbf{R})$  avec le groupe des isométries orientées du disque de Poincaré  $D$ . Il résulte des preuves de la Proposition et du Théorème 1 de [H1] que l'alternative de Tits pour  $PSL_2(\mathbf{R})$  prend la forme suivante: un sous-groupe  $G$  de  $PSL_2(\mathbf{R})$  contient un sous-groupe libre non abélien si et seulement si  $G$  ne fixe aucun point de  $D$ , aucun point au bord de  $D$ , et aucune paire de points au bord de  $D$ . L'analogie entre cet énoncé et l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) de notre théorème est évidemment frappante.

<sup>8)</sup> Ces deux définitions ne sont pas équivalentes pour un arbre réel non complet, comme le montre l'exemple banal de l'intervalle semi-ouvert  $]0, 1[$ .

## RÉFÉRENCES

- [BK] BASS, H. and R. KULKARNI. Uniform tree lattices. *Journal Amer. Math. Soc.* 3 (1990), 843-902.
- [Bo] BOURBAKI, N. *Espaces vectoriels topologiques*. Chapitres 1 à 5, Masson, 1981.
- [C1] CARTIER, P. Géométrie et analyse sur les arbres. *Séminaire Bourbaki*, Exposé 407, Février 1972; dans *Lect. Notes in Math.* 317, Springer 1973, 123-140.
- [C2] — Harmonic analysis on trees. *Proc. Amer. Math. Soc. Sympos. in Pure Math.* 26 (1972), 419-424.
- [CM] CULLER, M. and J. W. MORGAN. Group actions on  $\mathbf{R}$ -trees. *Proc. London Math. Soc.* (3) 55 (1987), 571-604.
- [Da] DAY, M. M. Amenable semigroups. *Illinois J. Math.* 1 (1957), 509-544.
- [Ey] EYMARD, P. Initiation à la théorie des groupes moyennables. Dans «*Analyse harmonique sur les groupes de Lie*», Séminaire Nancy-Strasbourg 1973-75, *Lecture Notes in Math.* 497, Springer 1975, 89-107.
- [FLR] FINE, B., F. LEVIN and G. ROSENBERGER. Free subgroups and decompositions of one-relator products of cyclics. Part I: The Tits alternative. *Arch. Math.* 50 (1988), 97-109.
- [GH] *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Ouvrage collectif édité par E. GHYS et P. DE LA HARPE, Birkhäuser 1990.
- [Gl] GREENLEAF, F. P. *Invariant means on topological groups*. Van Nostrand, 1969.
- [Gr] GROMOV, M. Hyperbolic groups. Dans «*Essays in group theory*», édité par S. M. Gersten, *M.S.R.I. Publ.* 8, Springer 1987, 75-263.
- [GS] GUPTA, N. and S. SIDKI. On the Burnside problem for periodic groups. *Math. Z.* 182 (1983), 385-388.
- [H1] DE LA HARPE, P. Free groups in linear groups. *L'Enseignement Math.* 29 (1983), 129-144.
- [H2] — Groupes de Coxeter infinis non affines. *Expo. Math.* 5 (1987), 91-96.
- [Ha] HAUSMANN, J.-C. Sur l'usage de critères pour reconnaître un groupe libre, un produit amalgamé ou une HNN-extension. *L'Enseignement Math.* 27 (1981), 221-242.
- [Mc] MCCARTHY, J. A «Tits-alternative» for subgroups of surface mapping class groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 291 (1985), 583-612.
- [MS] MORGAN, J. W. and P. B. SHALEN. Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures. I. *Ann. of Math.* 120 (1984), 401-476.
- [N1] NEBBIA, C. Groups of isometries of a tree and the Kunze-Stein phenomenon. *Pacific J. Math.* 133 (1988), 141-149.
- [N2] — Amenability and Kunze-Stein property for groups acting on a tree. *Pacific J. Math.* 135 (1988), 371-380.
- [vN] VON NEUMANN, J. Zur allgemeinen Theorie der Massen. *Fund. Math.* 13 (1929), 73-116 (= *Collected works*, Vol. 1, Pergamon Press 1961, 599-642).
- [Ol] OL'SHANSKII, A. Ju. On the problem of the existence of an invariant mean on a group. *Russian Math. Surveys* 35 (1980), 180-181.
- [Pa] PATERSON, A. L. *Amenability*. *Math. Surveys & Monographs* 29, Amer. Math. Soc. 1988.

- [Pl] PAULIN, F. Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels. *Invent. Math.* 94 (1988), 53-80.
- [Pi] PIER, J.-P. *L'analyse harmonique: son développement historique*. Masson 1990.
- [Ri] RICKERT, N. W. Some properties of locally compact groups. *J. Austr. Math. Soc.* 7 (1967), 433-454.
- [SW] SCOTT, P. and T. WALL. Topological methods in group theory. In *Homological group theory*, édité par C.T.C. Wall, London Math. Soc. Lecture Notes Series 36, Cambridge Univ. Press (1979), 137-203.
- [Se] SERRE, J.-P. *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . Astérisque 46, Soc. Math. France, 1977.
- [Sz] SZWARC, R. Groups acting on trees and approximation properties of the Fourier algebra. *J. Funct. Anal.* 95 (1991), 320-343.
- [Ti] TIGNOL, J.-P. Remarque sur le groupe des automorphismes d'un arbre. *Annales Soc. Sci. de Bruxelles*, 93 (1979), 196-202.
- [T1] TITS, J. Sur le groupe des automorphismes d'un arbre. Dans «*Essays in topology and related topics (Mémoires dédiés à G. de Rham)*», Springer 1970, 188-211.
- [T2] ——— Free subgroups in linear groups. *J. Algebra* 20 (1972), 250-270.
- [T3] ——— A «theorem of Lie-Kolchin» for trees. Dans «*Contributions to Algebra: a collection of papers dedicated to Ellis Kolchin*», Academic Press 1977, 377-388.
- [V1] VALETTE, A. Cocycles d'arbres et représentations uniformément bornées. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 310 (1990), 703-708.
- [V2] ——— Short proofs for some residual properties free groups. Pré-publication (1990), *Expo. Math.*, sous presse.
- [Wa] WANG, S. P. A note on free subgroups in linear groups. *J. of Algebra* 71 (1981), 232-234.
- [Wo] WOESS, W. Amenable group actions on infinite graphs. *Math. Ann.* 284 (1989), 251-265.

(Reçu le 3 octobre 1990)

Isabelle Pays

Département de Mathématiques  
 Université de l'Etat à Mons  
 15, Av. Maistriau  
 B-7000 Mons (Belgique)

Alain Valette

Institut de Mathématiques  
 Université de Neuchâtel  
 Chantemerle 20  
 CH-2007 Neuchâtel (Suisse)