

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXEMPLES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES
Autor: Audin, Michèle
Kapitel: 1. Introduction
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58736>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

EXEMPLES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES

par Michèle AUDIN¹⁾

1. INTRODUCTION

1.1. LE PROBLÈME

A l'origine de ce travail, j'ai essayé de comprendre pourquoi il était si difficile de construire des exemples de variétés symplectiques compactes. En général, on essaie de construire de nouveaux exemples en modifiant ceux qu'on connaît déjà. L'idée la plus simple est de faire des chirurgies, en particulier des sommes connexes... et l'essentiel de ces notes tourne autour du fait que ce n'est pas possible (sauf dans le cas des surfaces)²⁾.

Si une variété paracompacte W possède une 2-forme ω non-dégénérée, alors elle possède des structures presque complexes (et inversement): le groupe structural admet alors une réduction au groupe $\mathrm{Sp}(2n)$ des isométries d'une forme bilinéaire alternée non-dégénérée sur \mathbf{R}^{2n} , groupe dont $U(n)$ est la composante compacte.

Pour que W soit une variété symplectique, il faut en plus que la forme ω soit *fermée*. On sait, et on en aura confirmation dans cet article, que cette condition impose des restrictions très sévères. Il n'est resté pas moins que l'existence d'une structure presque complexe sur W est une condition nécessaire à l'existence d'une forme symplectique. Nous allons donc montrer quelques résultats sur les variétés presque complexes, qui pour être assez simples, sont apparemment mal (ou pas?) connus.

En appendice, le lecteur trouvera une démonstration du fait qu'il n'y a pas de somme connexe dans la catégorie symplectique, même dans les cas où il n'y a pas de difficulté de nature presque complexe. Le résultat est dû à Gromov [3], mais son article ne contient pas de démonstration détaillée.

¹⁾ Cet article est une extension des notes [1] d'un exposé fait au Séminaire de Géométrie de l'Université de Montpellier en mars 1990. Outre Jacques Lafontaine et les participants de ce séminaire, je remercie Dusa McDuff pour [6] et pour ses remarques récentes.

²⁾ Dans le cas des variétés de contact, toutes les chirurgies sont possibles (*voir* [10] et [11]).

1.2. SOMMES CONNEXES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES

Remarquons que, sauf en dimensions 2 et 6, il n'est pas possible de mettre une structure presque complexe «somme connexe» sur la somme connexe de deux variétés presque complexes.

PROPOSITION 1.2.1. *Si (V_1, J_1) et (V_2, J_2) sont deux variétés presque complexes de dimension $\neq 2$ ou 6, il n'existe aucune structure presque complexe J sur $W = V_1 \# V_2$ qui induise une structure homotope à J_i sur le complémentaire dans V_i du disque utilisé pour faire la chirurgie.*

Démonstration. Sur le disque D_i utilisé pour faire la chirurgie dans V_i , le fibré tangent à V_i est trivialisable. Supposons qu'une trivialisaton en soit fixée. Pour construire le fibré tangent à $W = V_1 \# V_2$, il suffit de recoller ces trivialisations, le long du bord S^{2n-1} par une application

$$\tau = S^{2n-1} \rightarrow SO(2n) .$$

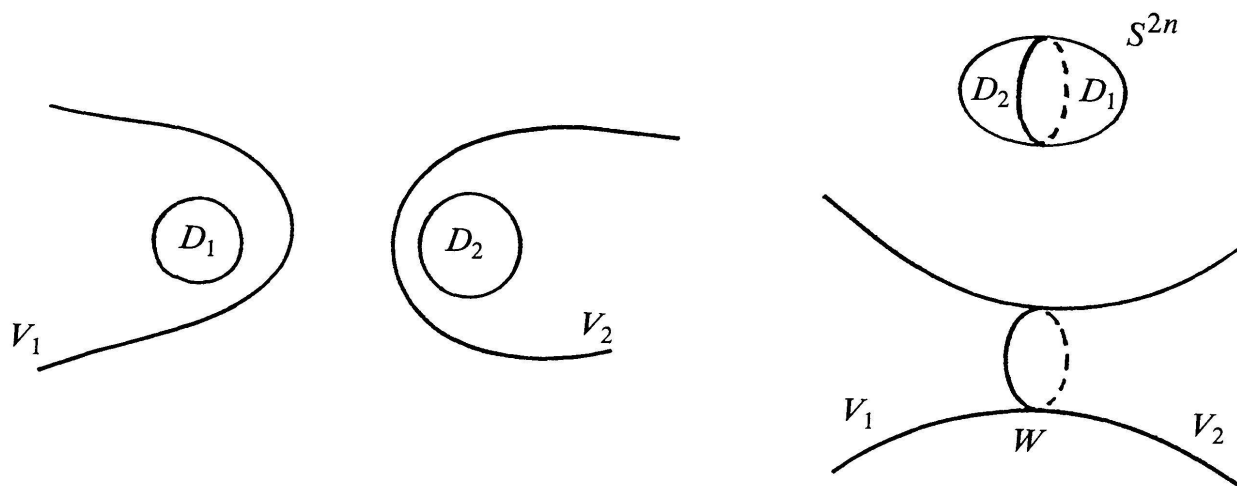


FIGURE 1

Outre le fibré tangent à W , τ permet de construire... le fibré tangent à la sphère S^{2n} comme on le voit sur la figure 1.

Prolonger des structures complexes J_1 et J_2 données sur V_1 et V_2 revient à relever τ en une application

$$\tilde{\tau} : S^{2n-1} \rightarrow U(n)$$

ce qui n'est donc possible que quand la sphère S^{2n} possède une structure presque complexe, c'est-à-dire quand $n = 1$ ou 3. \square

Remarque. Rappelons que, par intégralité du caractère de Chern de la sphère S^{2n} , celle-ci ne peut avoir de structure presque complexe que si sa caractéristique d'Euler est divisible par $(n-1)!$ (voir par exemple [5]), donc si $n = 1, 2$ ou 3 mais dans le cas $n = 2$ ça ne marche pas non plus à cause du théorème de la signature comme on va le voir. Par ailleurs, chacun connaît une structure presque complexe sur S^2 et il n'est pas très difficile d'en construire sur S^6 (voir par exemple [4]).

La situation est encore plus grave en dimension 4 où il suffit que V_1 et V_2 possèdent une structure presque complexe pour que $V_1 \# V_2$ n'en possède aucune.

1.3. STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES EN DIMENSION 4

Si W est une variété fermée orientée de dimension 4 et si J est une structure presque complexe sur W alors le fibré tangent (TW, J) possède, comme tout fibré vectoriel complexe de cette dimension, deux classes de Chern $c_1 \in H^2(W; \mathbf{Z})$ et $c_2 \in H^4(W; \mathbf{Z})$. Elles sont reliées à la signature σ de (la forme d'intersection de) W par la formule de Hirzebruch:

$$\langle c_1^2 - 2c_2, [W] \rangle = 3\sigma .$$

La classe de Chern de degré maximal c_2 est la classe d'Euler de TW et ne dépend pas de J . En appelant Q la forme quadratique sur $H^2(W; \mathbf{Z})$ et χ la caractéristique d'Euler, on voit que $c_1(TW, J)$ doit vérifier

$$Q(c_1) = 2\chi + 3\sigma .$$

Pour qu'une structure presque complexe J puisse exister sur W , il est donc nécessaire que $H^2(W; \mathbf{Z})$ contienne une classe x qui vérifie:

$$(1) \quad \begin{cases} Q(x) = 2\chi + 3\sigma \\ \rho_2(x) = w_2 \end{cases}$$

(la réduction modulo 2 de la classe c_1 est la classe de Stiefel-Whitney w_2).

Exemple. Pour que la somme connexe $\#^n \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ de n copies de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ possède une structure presque complexe, il faut que n soit impair.

Démonstration. Dans ce cas on a $\chi = n + 2, \sigma = n$ et dans la base évidente de $H^2(\#^n \mathbf{P}^2(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$, la forme quadratique est diagonalisée en

$$Q = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$

On doit donc pouvoir trouver des entiers *impairs* (a_1, \dots, a_n) tels que

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 = 2(n+2) + 3n = 5n + 4.$$

En calculant modulo 8 on voit que $n \equiv 5n + 4 \pmod{8}$ et donc que n doit être impair. \square

Si on se rappelle, que grâce à Wu [12], w_2 est caractéristique pour Q , c'est-à-dire que

$$\langle w_2 \cup \rho_2(x), [W] \rangle = Q(x) \pmod{2}$$

pour tout x de $H^2(W; \mathbf{Z})$, on montre de façon analogue:

PROPOSITION 1.3.1. *Si V_1 et V_2 sont deux variétés presque complexes de dimension 4, la somme connexe $V_1 \# V_2$ ne possède aucune structure presque complexe.*

COROLLAIRE 1.3.2. *Si W est une variété de dimension 4 qui possède une structure presque complexe, alors $W \# \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ n'en possède aucune.* \square

Par exemple $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \# \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$ ne possède aucune structure presque complexe, *a fortiori* aucune forme symplectique. En effet

$$\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \# \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$$

est le résultat de l'éclatement de n points de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et porte donc une structure complexe.

Remarque. En dépit de la notation, $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$ n'est bien sûr pas une somme connexe de variétés presque complexes: il n'y a aucune structure presque complexe sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ qui induise l'orientation opposée (c'est-à-dire celle qui définit l'objet noté $\overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$).

Démonstration de la proposition. Soit x_i la première classe de Chern de (V_i, J_i) , de sorte que

$$Q_i(x_i) = 2\chi(V_i) + 3\sigma(V_i)$$

Supposons que la somme connexe W possède une structure presque complexe. Elle va ainsi acquérir une première classe de Chern

$$y = (y_1, y_2) \in H^2(V_1; \mathbf{Z}) \oplus H^2(V_2; \mathbf{Z}) = H^2(W; \mathbf{Z})$$

qui vérifiera:

$$\begin{aligned} Q(y) &= Q_1(y_1) + Q_2(y_2) \\ &= 2\chi(W) + 3\sigma(W) \\ &= 2(\chi(V_1) + \chi(V_2) - 2) + 3(\sigma(V_1) + \sigma(V_2)) \end{aligned}$$

Mais y est caractéristique pour Q , sa réduction modulo 2 est la deuxième classe de Stiefel-Whitney de W ce qui fait que y_i a même réduction modulo 2 que x_i et est donc caractéristique... d'où on déduit, en calculant modulo 8:

$$\begin{aligned} 2(\chi(V_1) + \chi(V_2) - 2) + 3(\sigma(V_1) + \sigma(V_2)) &\equiv Q_1(y_1) + Q_2(y_2) \\ &\equiv Q_1(x_1) + Q_2(x_2) \\ &\equiv 2\chi(V_1) + 3\sigma(V_1) + 2\chi(V_2) \\ &\quad + 3\sigma(V_2) \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque 4 n'est pas divisible par 8. \square

Ce n'est pas vraiment un problème de somme connexe mais un problème de chirurgie: si on ajoute une anse d'indice 0 sur une même composante d'une variété W , on a un résultat tout à fait analogue.

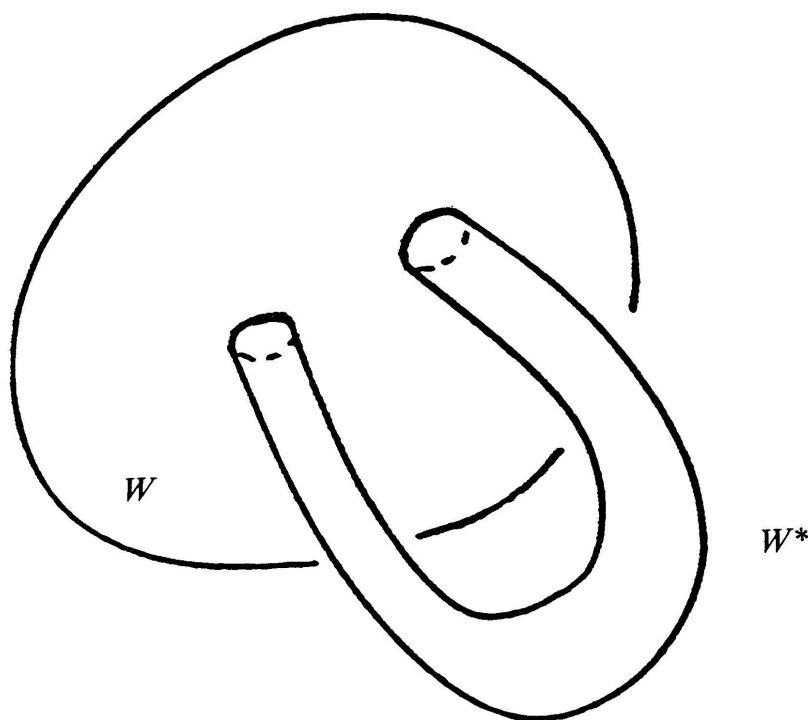


FIGURE 2

La variété «chirurgisée» W^* a le même H^2 que W et sa caractéristique d'Euler est

$$\chi(W^*) = \chi(W) - 2.$$

Si W est presque complexe, soit x sa première classe de Chern. On a $Q(x) = 3\sigma + 2\chi$. Pour que W^* possède une structure presque complexe quelle qu'elle soit, il faut qu'on puisse trouver un $y \in H^2(W; \mathbf{Z})$ avec $\rho_2(y) = \rho_2(x) = w_2$ et $Q(y) = 3\sigma + 2\chi - 4$ ce qui est interdit par le même calcul modulo 8. \square

C'est encore un théorème de Wu [12] qui affirme que l'existence d'une classe x vérifiant (1) est suffisante pour l'existence d'une structure presque complexe J (dont x est alors la première classe de Chern, plus précisément la classe d'homotopie de J est déterminée par cet x).

Exemple. Pour que la somme connexe $\#^n \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ de n copies de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ possède une structure presque complexe, il suffit que n soit impair.

Démonstration. Montrons en effet que l'équation (2) a toujours des solutions. C'est évidemment le cas pour $n = 1$ (!) et bien sûr, si (a_1, \dots, a_n) est une solution

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 1 + 9 = 5n + 4 + 10 = 5(n+2) + 4$$

et $(a_1, \dots, a_n, 1, 3)$ est une solution (pour $n+2$). \square

Remarque. Dès que $n \geq 5$, l'équation (2) a d'autres solutions que celles obtenues par récurrence ci-dessus, par exemple $(5, 1, 1, 1, 1)$ et celles qu'on en déduit en ajoutant des $(1, 3)$.

Exemple. On en déduit que $\#^n \mathbf{P}^2 \#^m \overline{\mathbf{P}^2}$ a une structure presque complexe si et seulement si n est impair. Comme on a dit, ajouter un $\overline{\mathbf{P}^2}$ peut se faire en éclatant un point, ce qui fait qu'on peut en ajouter autant qu'on veut à $\#^n \mathbf{P}^2$ (pour n impair) et obtenir une variété presque complexe. Au contraire si $n = 2p$, alors $\#^n \mathbf{P}^2 \#^m \overline{\mathbf{P}^2} = (\#^{2p-1} \mathbf{P}^2 \#^m \overline{\mathbf{P}^2}) \# \mathbf{P}^2$ est la somme connexe de deux variétés possédant des structures presque complexes et donc n'en possède pas. \square

Remarque. Il y a aussi des structures presque complexes sur $\#^n \mathbf{P}^2 \#^m \overline{\mathbf{P}^2}$ qui ne correspondent pas à des éclatements de $\#^n \mathbf{P}^2$. L'équation analogue à (2) est

$$(3) \quad a_1^2 + \cdots + a_n^2 - b_1^2 - \cdots - b_m^2 = 3(n - m) + 2(n + m + 2) \\ = 5n - m + 4$$

(toujours en entiers impairs) qui a bien sûr comme solutions les

$$(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1)$$

où (a_1, \dots, a_n) est solution de (2), mais aussi par exemple pour $n = 1$ et $m \geq 2$: $(5, 3, 3, 1, \dots, 1)$ et pour $n = 3$ et $m \geq 1$: $(3, 3, 3, 3, 1, \dots, 1)$.

2. ANSES PRESQUE COMPLEXES

2.1. ANSES CLASSIQUES

Il est assez clair que le mal vient du fait que S^4 ne possède pas de structure presque complexe. Essayons donc de remplacer S^4 par une variété presque complexe pas trop compliquée. La chirurgie considérée ci-dessus peut se décrire ainsi:

$$W^* = \overline{W - (S^0 \times B^4)} \cup_{\partial} (B^1 \times S^3) \\ = \overline{W - (S^0 \times B^4)} \cup_{\partial} \overline{S^4 - (S^0 \times B^4)}$$

où le recollement se fait maintenant par un difféomorphisme des bords qui renverse l'orientation.

2.2. ANSES PRESQUE COMPLEXES

Cette description se prête à une généralisation: on y remplace S^4 par une variété fermée (c'est-à-dire compacte sans bord) et connexe V .

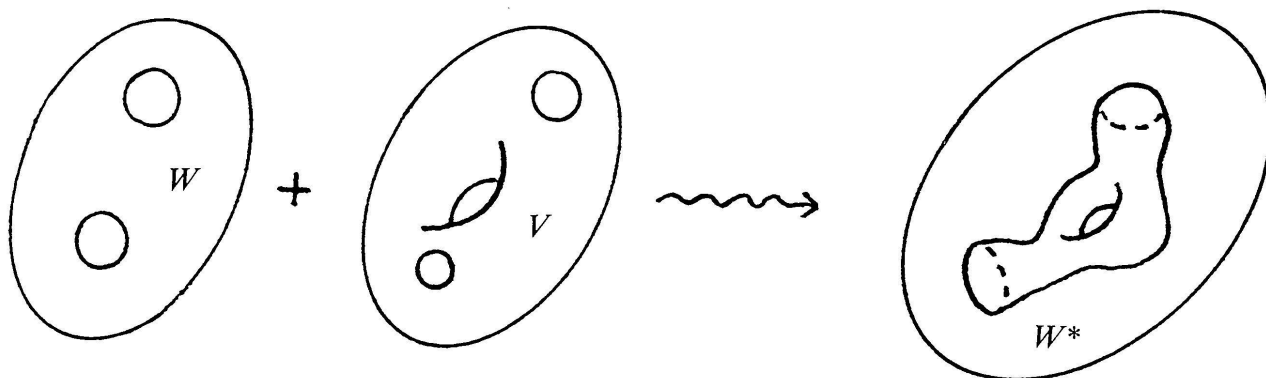


FIGURE 3