

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EXEMPLES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES  
**Autor:** Audin, Michèle  
**Kapitel:** 1.2. Sommes connexes de variétés presque complexes  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58736>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1.2. SOMMES CONNEXES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES

Remarquons que, sauf en dimensions 2 et 6, il n'est pas possible de mettre une structure presque complexe «somme connexe» sur la somme connexe de deux variétés presque complexes.

PROPOSITION 1.2.1. *Si  $(V_1, J_1)$  et  $(V_2, J_2)$  sont deux variétés presque complexes de dimension  $\neq 2$  ou 6, il n'existe aucune structure presque complexe  $J$  sur  $W = V_1 \# V_2$  qui induise une structure homotope à  $J_i$  sur le complémentaire dans  $V_i$  du disque utilisé pour faire la chirurgie.*

*Démonstration.* Sur le disque  $D_i$  utilisé pour faire la chirurgie dans  $V_i$ , le fibré tangent à  $V_i$  est trivialisable. Supposons qu'une trivialisations en soit fixée. Pour construire le fibré tangent à  $W = V_1 \# V_2$ , il suffit de recoller ces trivialisations, le long du bord  $S^{2n-1}$  par une application

$$\tau = S^{2n-1} \rightarrow SO(2n) .$$

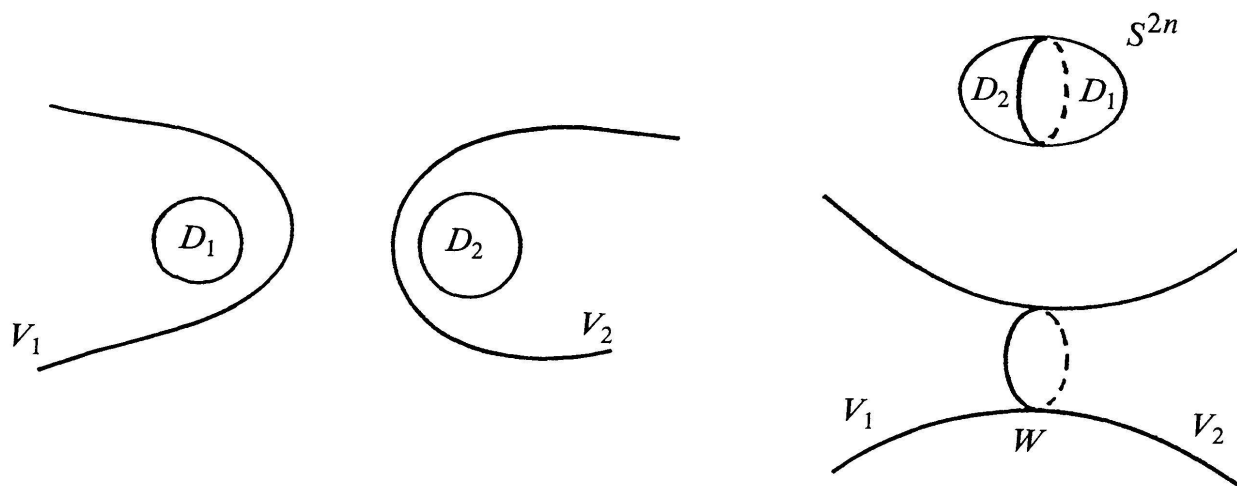


FIGURE 1

Outre le fibré tangent à  $W$ ,  $\tau$  permet de construire... le fibré tangent à la sphère  $S^{2n}$  comme on le voit sur la figure 1.

Prolonger des structures complexes  $J_1$  et  $J_2$  données sur  $V_1$  et  $V_2$  revient à relever  $\tau$  en une application

$$\tilde{\tau} : S^{2n-1} \rightarrow U(n)$$

ce qui n'est donc possible que quand la sphère  $S^{2n}$  possède une structure presque complexe, c'est-à-dire quand  $n = 1$  ou 3.  $\square$

*Remarque.* Rappelons que, par intégralité du caractère de Chern de la sphère  $S^{2n}$ , celle-ci ne peut avoir de structure presque complexe que si sa caractéristique d'Euler est divisible par  $(n-1)!$  (voir par exemple [5]), donc si  $n = 1, 2$  ou  $3$  mais dans le cas  $n = 2$  ça ne marche pas non plus à cause du théorème de la signature comme on va le voir. Par ailleurs, chacun connaît une structure presque complexe sur  $S^2$  et il n'est pas très difficile d'en construire sur  $S^6$  (voir par exemple [4]).

La situation est encore plus grave en dimension 4 où il suffit que  $V_1$  et  $V_2$  possèdent une structure presque complexe pour que  $V_1 \# V_2$  n'en possède aucune.

### 1.3. STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES EN DIMENSION 4

Si  $W$  est une variété fermée orientée de dimension 4 et si  $J$  est une structure presque complexe sur  $W$  alors le fibré tangent  $(TW, J)$  possède, comme tout fibré vectoriel complexe de cette dimension, deux classes de Chern  $c_1 \in H^2(W; \mathbf{Z})$  et  $c_2 \in H^4(W; \mathbf{Z})$ . Elles sont reliées à la signature  $\sigma$  de (la forme d'intersection de)  $W$  par la formule de Hirzebruch:

$$\langle c_1^2 - 2c_2, [W] \rangle = 3\sigma .$$

La classe de Chern de degré maximal  $c_2$  est la classe d'Euler de  $TW$  et ne dépend pas de  $J$ . En appelant  $Q$  la forme quadratique sur  $H^2(W; \mathbf{Z})$  et  $\chi$  la caractéristique d'Euler, on voit que  $c_1(TW, J)$  doit vérifier

$$Q(c_1) = 2\chi + 3\sigma .$$

Pour qu'une structure presque complexe  $J$  puisse exister sur  $W$ , il est donc nécessaire que  $H^2(W; \mathbf{Z})$  contienne une classe  $x$  qui vérifie:

$$(1) \quad \begin{cases} Q(x) = 2\chi + 3\sigma \\ \rho_2(x) = w_2 \end{cases}$$

(la réduction modulo 2 de la classe  $c_1$  est la classe de Stiefel-Whitney  $w_2$ ).

*Exemple.* Pour que la somme connexe  $\#^n \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  de  $n$  copies de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  possède une structure presque complexe, il faut que  $n$  soit impair.

*Démonstration.* Dans ce cas on a  $\chi = n + 2, \sigma = n$  et dans la base évidente de  $H^2(\#^n \mathbf{P}^2(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$ , la forme quadratique est diagonalisée en

$$Q = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$