Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXEMPLES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES

Autor: Audin, Michèle

Kapitel: 1.2. Sommes connexes de variétés presque complexes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58736

1.2. Sommes connexes de variétés presque complexes

Remarquons que, sauf en dimensions 2 et 6, il n'est pas possible de mettre une structure presque complexe «somme connexe» sur la somme connexe de deux variétés presque complexes.

Proposition 1.2.1. *Si* (V_1, J_1) *et* (V_2, J_2) *sont deux variétés presque complexes de dimension* $\neq 2$ *ou* 6, *il n'existe aucune structure presque complexe* J *sur* $W = V_1 \# V_2$ *qui induise une structure homotope à* J_i *sur le complémentaire dans* V_i *du disque utilisé pour faire la chirurgie.*

Démonstration. Sur le disque D_i utilisé pour faire la chirurgie dans V_i, le fibré tangent à V_i est trivialisable. Supposons qu'une trivialisation en soit fixée. Pour construire le fibré tangent à $W = V_1 \# V_2$, il suffit de recoller ces trivialisations, le long du bord S^{2n-1} par une application

$$\tau = S^{2n-1} \to SO(2n) .$$

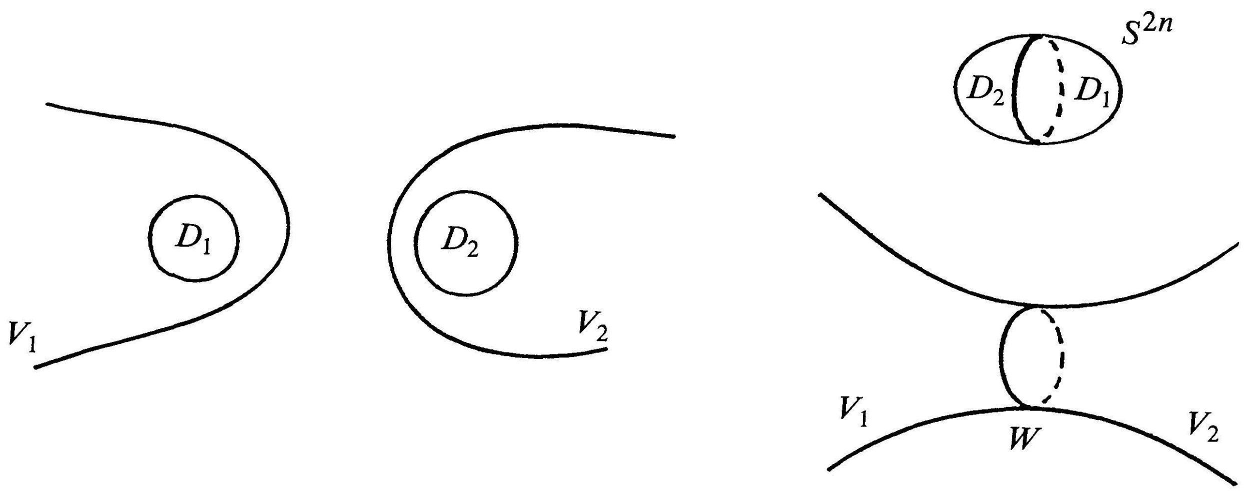

Figure 1

Outre le fibré tangent à W, τ permet de construire... le fibré tangent à la sphère S^{2n} comme on le voit sur la figure 1.

Prolonger des structures complexes J_1 et J_2 données sur V_1 et V_2 revient à relever τ en une application

$$\tilde{\tau} : S^{2n-1} \to U(n)$$

ce qui n'est donc possible que quand la sphère S^{2n} possède une structure presque complexe, c'est-à-dire quand $n = 1$ ou 3. $\square$

Remarque. Rappelons que, par intégralité du caractère de Chern de la sphère S^{2n}, celle-ci ne peut avoir de structure presque complexe que si sa caractéristique d'Euler est divisible par $(n-1)!$ (*voir* par exemple [5]), donc si $n = 1, 2$ ou 3 mais dans le cas $n = 2$ ça ne marche pas non plus à cause du théorème de la signature comme on va le voir. Par ailleurs, chacun connaît une structure presque complexe sur S^2 et il n'est pas très difficile d'en construire sur S^6 (*voir* par exemple [4]).

La situation est encore plus grave en dimension 4 où il suffit que V_1 et V_2 possèdent une structure presque complexe pour que $V_1 \# V_2$ n'en possède aucune.

1.3. STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES EN DIMENSION 4

Si W est une variété fermée orientée de dimension 4 et si J est une structure presque complexe sur W alors le fibré tangent (TW, J) possède, comme tout fibré vectoriel complexe de cette dimension, deux classes de Chern $c_1 \in H^2(W; \mathbf{Z})$ et $c_2 \in H^4(W; \mathbf{Z})$. Elles sont reliées à la signature σ de (la forme d'intersection de) W par la formule de Hirzebruch:

$$\langle c_1^2 - 2c_2, [W] \rangle = 3\sigma .$$

La classe de Chern de degré maximal c_2 est la classe d'Euler de TW et ne dépend pas de J. En appelant Q la forme quadratique sur $H^2(W; \mathbf{Z})$ et χ la caractéristique d'Euler, on voit que $c_1(TW, J)$ doit vérifier

$$Q(c_1) = 2\chi + 3\sigma .$$

Pour qu'une structure presque complexe J puisse exister sur W, il est donc nécessaire que $H^2(W; \mathbf{Z})$ contienne une classe x qui vérifie:

$$(1) \qquad \begin{cases} Q(x) &= 2\chi + 3\sigma \\ \rho_2(x) &= \quad w_2 \end{cases}$$

(la réduction modulo 2 de la classe c_1 est la classe de Stiefel-Whitney w_2).

Exemple. Pour que la somme connexe $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ de n copies de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ possède une structure presque complexe, il faut que n soit impair.

Démonstration. Dans ce cas on a $\chi = n + 2, \sigma = n$ et dans la base évidente de $H^2(\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$, la forme quadratique est diagonalisée en

$$Q = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$