Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXEMPLES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES

Autor: Audin, Michèle

Kapitel: 1.3. Structures presque complexes en dimension 4

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58736

Remarque. Rappelons que, par intégralité du caractère de Chern de la sphère S^{2n}, celle-ci ne peut avoir de structure presque complexe que si sa caractéristique d'Euler est divisible par $(n-1)!$ (*voir* par exemple [5]), donc si $n = 1, 2$ ou 3 mais dans le cas $n = 2$ ça ne marche pas non plus à cause du théorème de la signature comme on va le voir. Par ailleurs, chacun connaît une structure presque complexe sur S^2 et il n'est pas très difficile d'en construire sur S^6 (*voir* par exemple [4]).

La situation est encore plus grave en dimension 4 où il suffit que V_1 et V_2 possèdent une structure presque complexe pour que $V_1 \# V_2$ n'en possède aucune.

1.3. Structures presque complexes en dimension 4

Si W est une variété fermée orientée de dimension 4 et si J est une structure presque complexe sur W alors le fibré tangent (TW, J) possède, comme tout fibré vectoriel complexe de cette dimension, deux classes de Chern $c_1 \in H^2(W; \mathbf{Z})$ et $c_2 \in H^4(W; \mathbf{Z})$. Elles sont reliées à la signature σ de (la forme d'intersection de) W par la formule de Hirzebruch:

$$\langle c_1^2 - 2c_2, [W] \rangle = 3\sigma .$$

La classe de Chern de degré maximal c_2 est la classe d'Euler de TW et ne dépend pas de J. En appelant Q la forme quadratique sur $H^2(W; \mathbf{Z})$ et χ la caractéristique d'Euler, on voit que $c_1(TW, J)$ doit vérifier

$$Q(c_1) = 2\chi + 3\sigma .$$

Pour qu'une structure presque complexe J puisse exister sur W, il est donc nécessaire que $H^2(W; \mathbf{Z})$ contienne une classe x qui vérifie:

$$(1) \qquad \begin{cases} Q(x) = 2\chi + 3\sigma \\ \rho_2(x) = w_2 \end{cases}$$

(la réduction modulo 2 de la classe c_1 est la classe de Stiefel-Whitney w_2).

Exemple. Pour que la somme connexe $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ de n copies de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ possède une structure presque complexe, il faut que n soit impair.

Démonstration. Dans ce cas on a $\chi = n + 2, \sigma = n$ et dans la base évidente de $H^2(\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$, la forme quadratique est diagonalisée en

$$Q = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$

On doit donc pouvoir trouver des entiers *impairs* $(a_1, \ldots, a_n)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2(n+2) + 3n = 5n + 4 . \tag{2}$$

En calculant modulo 8 on voit que $n \equiv 5n + 4 \bmod 8$ et donc que n doit être impair. □

Si on se rappelle, que grâce à Wu [12], w_2 est caractéristique pour Q, c'est-à-dire que

$$\langle w_2 \cup \rho_2(x), [W] \rangle = Q(x) \bmod 2$$

pour tout x de $H^2(W; \mathbf{Z})$, on montre de façon analogue:

PROPOSITION 1.3.1. *Si V_1 et V_2 sont deux variétés presque complexes de dimension 4, la somme connexe $V_1 \# V_2$ ne possède aucune structure presque complexe.*

COROLLAIRE 1.3.2. *Si W est une variété de dimension 4 qui possède une structure presque complexe, alors $W \# \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ n'en possède aucune.* □

Par exemple $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \overset{n}{\#} \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$ ne possède aucune structure presque complexe, *a fortiori* aucune forme symplectique. En effet

$$\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \overset{n}{\#} \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$$

est le résultat de l'éclatement de n points de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et porte donc une structure complexe.

Remarque. En dépit de la notation, $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$ n'est bien sûr pas une somme connexe de variétés presque complexes: il n'y a aucune structure presque complexe sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ qui induise l'orientation opposée (c'est-à-dire celle qui définit l'objet noté $\overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$).

Démonstration de la proposition. Soit x_i la première classe de Chern de (V_i, J_i), de sorte que

$$Q_i(x_i) = 2\chi(V_i) + 3\sigma(V_i)$$

Supposons que la somme connexe W possède une structure presque complexe. Elle va ainsi acquérir une première classe de Chern

$$y = (y_1, y_2) \in H^2(V_1;\mathbf{Z}) \oplus H^2(V_2;\mathbf{Z}) = H^2(W;\mathbf{Z})$$

qui vérifiera:

$$\begin{aligned} Q(y) &= Q_1(y_1) + Q_2(y_2) \\ &= 2\chi(W) + 3\sigma(W) \\ &= 2(\chi(V_1)+\chi(V_2)-2) + 3(\sigma(V_1)+\sigma(V_2)) \end{aligned}$$

Mais y est caractéristique pour Q, sa réduction modulo 2 est la deuxième classe de Stiefel-Whitney de W ce qui fait que y_i a même réduction modulo 2 que x_i et est donc caractéristique... d'où on déduit, en calculant modulo 8:

$$\begin{aligned} 2(\chi(V_1)+\chi(V_2)-2) + 3(\sigma(V_1)+\sigma(V_2)) &\equiv Q_1(y_1) + Q_2(y_2) \\ &\equiv Q_1(x_1) + Q_2(x_2) \\ &\equiv 2\chi(V_1) + 3\sigma(V_1) + 2\chi(V_2) \\ &\quad + 3\sigma(V_2) \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque 4 n'est pas divisible par 8. □

Ce n'est pas vraiment un problème de somme connexe mais un problème de chirurgie: si on ajoute une anse d'indice 0 sur une même composante d'une variété W, on a un résultat tout à fait analogue.

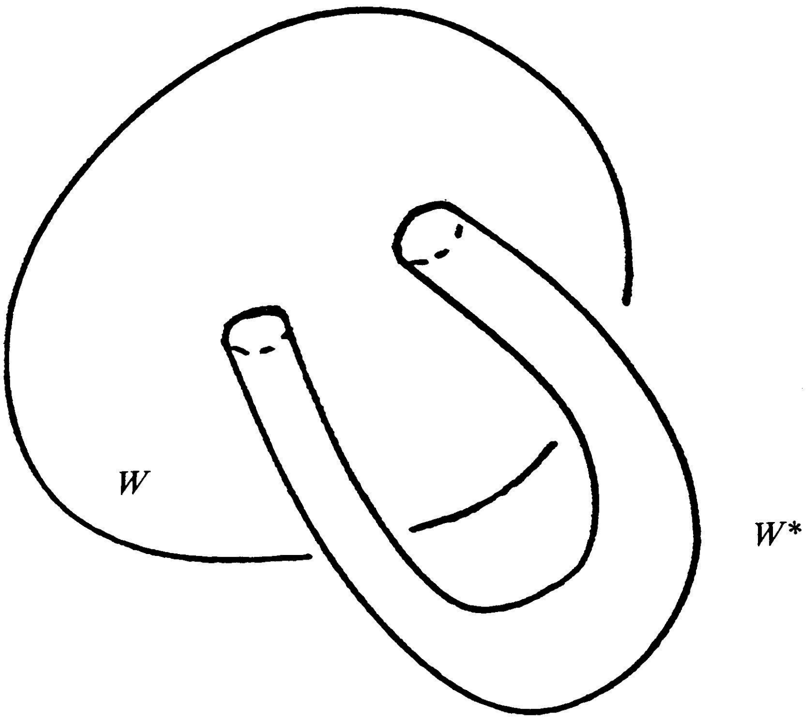

FIGURE 2

La variété «chirurgisée» W^* a le même H^2 que W et sa caractéristique d'Euler est

$$\chi(W^*) = \chi(W) - 2 .$$

Si W est presque complexe, soit x sa première classe de Chern. On a $Q(x) = 3\sigma + 2\chi$. Pour que W^* possède une structure presque complexe quelle qu'elle soit, il faut qu'on puisse trouver un $y \in H^2(W; \mathbf{Z})$ avec $\rho_2(y) = \rho_2(x) = w_2$ et $Q(y) = 3\sigma + 2\chi - 4$ ce qui est interdit par le même calcul modulo 8. $\square$

C'est encore un théorème de Wu [12] qui affirme que l'existence d'une classe x vérifiant (1) est suffisante pour l'existence d'une structure presque complexe J (dont x est alors la première classe de Chern, plus précisément la classe d'homotopie de J est déterminée par cet x).

Exemple. Pour que la somme connexe $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ de n copies de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ possède une structure presque complexe, il suffit que n soit impair.

Démonstration. Montrons en effet que l'équation (2) a toujours des solutions. C'est évidemment le cas pour $n = 1$ (!) et bien sûr, si $(a_1, \ldots, a_n)$ est une solution

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 9 = 5n + 4 + 10 = 5(n+2) + 4$$

et $(a_1, \ldots, a_n, 1, 3)$ est une solution (pour $n+2$). $\square$

Remarque. Dès que $n \geqslant 5$, l'équation (2) a d'autres solutions que celles obtenues par récurrence ci-dessus, par exemple $(5, 1, 1, 1, 1)$ et celles qu'on en déduit en ajoutant des $(1, 3)$.

Exemple. On en déduit que $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2 \# \overset{m}{\#}\, \overline{\mathbf{P}^2}$ a une structure presque complexe si et seulement si n est impair. Comme on a dit, ajouter un $\overline{\mathbf{P}^2}$ peut se faire en éclatant un point, ce qui fait qu'on peut en ajouter autant qu'on veut à $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2$ (pour n impair) et obtenir une variété presque complexe. Au contraire si $n = 2p$, alors $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2 \# \overset{m}{\#}\, \overline{\mathbf{P}^2} = (\overset{2p-1}{\#}\, \mathbf{P}^2 \# \overset{m}{\#}\, \overline{\mathbf{P}^2}) \# \mathbf{P}^2$ est la somme connexe de deux variétés possédant des structures presque complexes et donc n'en possède pas. $\square$

Remarque. Il y a aussi des structures presque complexes sur $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2 \# \overset{m}{\#}\, \overline{\mathbf{P}^2}$ qui ne correspondent *pas* à des éclatements de $\overset{n}{\#}\, \mathbf{P}^2$. L'équation analogue à (2) est

$$(3) \qquad a_1^2 + \cdots + a_n^2 - b_1^2 - \cdots - b_m^2 = 3(n-m) + 2(n+m+2) \\ = 5n - m + 4$$

(toujours en entiers impairs) qui a bien sûr comme solutions les

$$(a_1, \ldots, a_n, 1, \ldots, 1)$$

où $(a_1, \ldots, a_n)$ est solution de (2), mais aussi par exemple pour $n = 1$ et $m \geqslant 2$: $(5, 3, 3, 1, \ldots, 1)$ et pour $n = 3$ et $m \geqslant 1$: $(3, 3, 3, 3, 1, \ldots, 1)$.

2. Anses presque complexes

2.1. Anses classiques

Il est assez clair que le mal vient du fait que S^4 ne possède pas de structure presque complexe. Essayons donc de remplacer S^4 par une variété presque complexe pas trop compliquée. La chirurgie considérée ci-dessus peut se décrire ainsi:

$$W^* = \overline{W - (S^0 \times B^4)} \cup_\partial (B^1 \times S^3) \\ = \overline{W - (S^0 \times B^4)} \cup_\partial \overline{S^4 - (S^0 \times B^4)}$$

où le recollement se fait maintenant par un difféomorphisme des bords qui renverse l'orientation.

2.2. Anses presque complexes

Cette description se prête à une généralisation: on y remplace S^4 par une variété fermée (c'est-à-dire compacte sans bord) et connexe V.

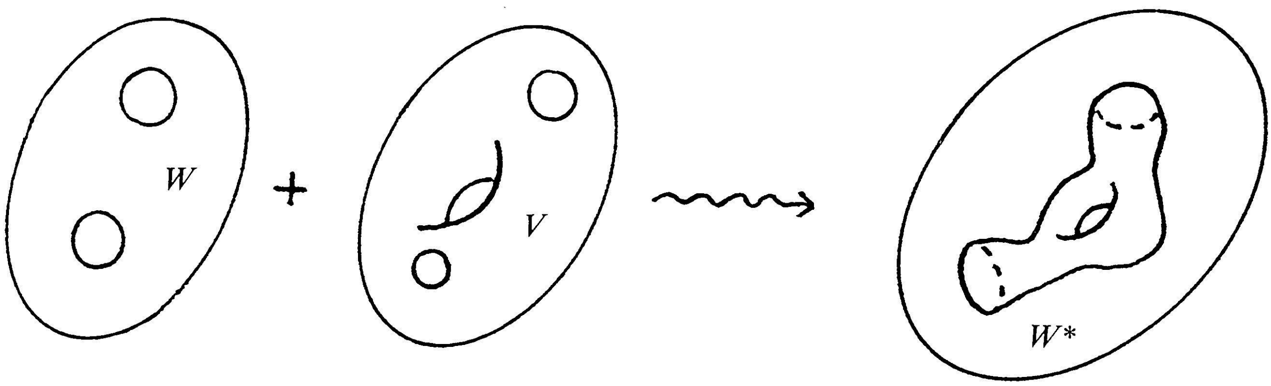

Figure 3