

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** COMMENT RENDRE GÉODÉSIQUE UNE TRIANGULATION D'UNE SURFACE?  
**Autor:** de Verdière, Yves Colin  
**Rubrik**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58738>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$E_c(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \int_0^1 \|\dot{\varphi}_{i,j}(s)\|^2 ds,$$

où  $\varphi_{i,j}$  est la restriction de  $\varphi$  à l'arête  $(i, j)$  et  $\dot{\varphi}_{i,j}$  désigne la dérivée par rapport à  $s$ .

On souhaite montrer, que sous des hypothèses convenables, si  $\varphi$  minimise  $E_c$  dans la classe d'homotopie d'une triangulation topologique donnée  $\varphi_0$ , alors  $\varphi$  est la restriction à  $\Gamma_0$  d'une triangulation géodésique isotope à la triangulation initiale. On a également des résultats dans le cas des variétés à bord en supposant le bord de la triangulation fixé sur un polygone convexe.

**THÉORÈME 1.** *Dans la classe d'homotopie de  $\varphi_0$ , il existe, pour chaque choix de  $c$ , une application  $\varphi$  minimisant  $E_c$ . De plus, si la courbure de  $g$  est négative ou nulle,  $\varphi$  est essentiellement unique, au sens que, si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont 2 minimas homotopes, ils le sont par  $\varphi_t$  qui est une courbe de minimas telle que la région balayée par l'image de  $\varphi_t$  est plate et que  $\partial\varphi_t/\partial t$  est un champ de vecteurs constant le long de chaque image  $\varphi_t(\Gamma_0)$ : en particulier les images de  $\Gamma_0$  par les  $\varphi_t$  sont isométriques. Si la courbure est  $< 0$ , on a unicité.*

Le résultat principal est alors le:

**THÉORÈME 2.** *Si  $(X, g)$  est à courbure de Gauss  $\leq 0$ , toute  $\varphi$  minimisant  $E_c$  est un plongement géodésique de  $\Gamma_0$  qui admet un prolongement (unique à isotopie près) en une triangulation de  $X$  isotope à  $\Phi_0$ .*

Nous énonçons maintenant une version à bord:  $X$  est un polygone géodésique strictement convexe d'une surface 1-connexe à courbure  $\leq 0$ . On se donne une triangulation  $\Phi_0$  de  $X$ , telle que le bord de  $X_0$  soit un cycle  $(1, 2, \dots, N)$ , que  $\Phi_0$  envoie les sommets de ce cycle sur les sommets du polygone (dans le même ordre) et les arêtes  $(i, i+1)$  ( $1 \leq i \leq N$ ) sur les côtés de  $X$  (avec la convention habituelle  $N+1 = 1$ ).

On a alors le:

**THÉORÈME 3.** *Pour tout choix de  $c \in (\mathbf{R}^+ \setminus 0)^A$  (où  $A$  désigne maintenant les arêtes intérieures de  $X_0$ ), il existe un  $\varphi$  unique minimisant  $E_c$  à bord fixé et ce  $\varphi$  est la restriction à  $\Gamma_0$  d'une triangulation géodésique de  $X$  isotope à  $\Phi_0$ .*