Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1991)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: COMMENT RENDRE GÉODÉSIQUE UNE TRIANGULATION D'UNE SURFACE?

Autor: de Verdière, Yves Colin

Rubrik

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58738

$$E_c(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \int_0^1 \| \dot{\varphi}_{i,j}(s) \|^2 \, ds ,$$

où $\varphi_{i,j}$ est la restriction de φ à l'arête (i, j) et $\dot{\varphi}_{i,j}$ désigne la dérivée par rapport à s.

On souhaite montrer, que sous des hypothèses convenables, si φ minimise E_c dans la classe d'homotopie d'une triangulation topologique donnée φ_0, alors φ est la restriction à Γ_0 d'une triangulation géodésique isotope à la triangulation initiale. On a également des résultats dans le cas des variétés à bord en supposant le bord de la triangulation fixé sur un polygone convexe.

THÉORÈME 1. *Dans la classe d'homotopie de* φ_0, *il existe, pour chaque choix de* c, *une application* φ *minimisant* E_c. *De plus, si la courbure de* g *est négative ou nulle,* φ *est essentiellement unique, au sens que, si* φ_1 *et* φ_2 *sont 2 minimas homotopes, ils le sont par* φ_t *qui est une courbe de minimas telle que la région balayée par l'image de* φ_t *est plate et que* $\partial\varphi_t/\partial t$ *est un champ de vecteurs constant le long de chaque image* $\varphi_t(\Gamma_0)$: *en particulier les images de* Γ_0 *par les* φ_t *sont isométriques. Si la courbure est* < 0, *on a unicité.*

Le résultat principal est alors le:

THÉORÈME 2. *Si* (X, g) *est à courbure de Gauss* $\leqslant 0$, *toute* φ *minimisant* E_c *est un plongement géodésique de* Γ_0 *qui admet un prolongement (unique à isotopie près) en une triangulation de* X *isotope à* Φ_0.

Nous énonçons maintenant une version à bord: X est un polygone géodésique strictement convexe d'une surface 1-connexe à courbure $\leqslant 0$. On se donne une triangulation Φ_0 de X, telle que le bord de X_0 soit un cycle $(1, 2, \ldots, N)$, que Φ_0 envoie les sommets de ce cycle sur les sommets du polygone (dans le même ordre) et les arêtes $(i, i+1)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ sur les côtés de X (avec la convention habituelle $N + 1 = 1$).

On a alors le:

THÉORÈME 3. *Pour tout choix de* $c \in (\mathbf{R}^+ \backslash 0)^A$ *(où* A *désigne maintenant les arêtes intérieures de* X_0*), il existe un* φ *unique minimisant* E_c *à bord fixé et ce* φ *est la restriction à* Γ_0 *d'une triangulation géodésique de* X *isotope à* Φ_0.