

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** COMMENT RENDRE GÉODÉSIQUE UNE TRIANGULATION D'UNE SURFACE?  
**Autor:** de Verdière, Yves Colin  
**Kapitel:** 2. Preuve du théorème 2  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58738>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Montrons que la fonctionnelle  $E_c$  atteint son minimum sur  $H^1(\Gamma_0, X)$ : cela résulte classiquement de la compacité des ensembles  $E_c \leq M$  pour la topologie de la convergence uniforme (Ascoli:  $d(\varphi_{i,j}(s), \varphi_{i,j}(s')) \leq C^{te} \cdot \sqrt{|s' - s|}$ ) et de la semi-continuité inférieure de  $E_c$  pour cette topologie.

Si on a 2 solutions, soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , on peut rendre l'homotopie entre elles géodésique, au sens que pour chaque  $t$ , la restriction de  $\varphi_t$  aux arêtes de  $\Gamma_0$  est géodésique et que, pour tout sommet  $i$  de  $\Gamma_0$ , l'application  $t \rightarrow \varphi_t(i)$  est géodésique.  $E_c(\varphi_t)$  est alors convexe pour  $t \in [1, 2]$  dès que la courbure de  $X$  est  $\leq 0$ ; en effet, si  $V_{i,j} = \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial t}$ ,  $T = \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial s}$  et  $K_g$  est la courbure sectionnelle, on a la formule de variation seconde:

$$\frac{d^2 E_c}{dt^2} = \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \int_0^1 (\| \nabla_T V_{i,j} \|^2 - K_g(\varphi_{i,j}(s)) | (V_{i,j})_{norm} |^2) ds ,$$

où  $(V_{i,j})_{norm}$  est la composante normale à  $T$  de  $V_{i,j}$ .

On en déduit que  $E_c(\varphi_t)$  est constante, ainsi que les longueurs des images par  $\varphi_t$  des arêtes de  $\Gamma_0$  (somme constante de fonctions convexes), puis le résultat annoncé: la distance entre 2 points parcourant à vitesse constante 2 géodésiques ne pouvant être constante que si la région balayée est plate et les 2 géodésiques *parallèles* et parcourues à la même vitesse.

Remarquons aussi que les extrémums de  $E_c$  sont caractérisés par le fait que les  $\varphi_{i,j}$  sont des arcs géodésiques paramétrés proportionnellement à la longueur et qu'on a

$$\forall i, \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \dot{\varphi}_{i,j}(0) = 0 ,$$

où  $\varphi_{i,j}$  est supposée telle que  $\varphi_{i,j}(0) = \varphi(i)$ .

## 2. PREUVE DU THÉORÈME 2

Dans ce §,  $\varphi$  est donnée minimisant  $E_c$  dans la classe d'homotopie de  $\varphi_0$ . Pour tout triangle  $T$  de  $X_0$ , la restriction de  $\varphi$  au bord de  $T$  est homotope à 0 et donc se relève en un  $\tilde{\varphi}$  dans le revêtement universel  $\tilde{X}$  de  $X$ , unique à automorphisme près du revêtement. L'image  $\tilde{\varphi}(\partial T)$  est le bord d'un triangle  $T_\varphi$  (éventuellement dégénéré) de  $\tilde{X}$ . On prolonge  $\varphi$  à  $X_0$  en  $\Phi$  de façon que, pour tout triangle  $T$ , on ait  $\Phi(T) = \pi(T_\varphi)$ , où  $\pi$  est la projection canonique

de  $\tilde{X}$  sur  $X$  et que  $\Phi$  soit un homéomorphisme local de  $T$  sur  $\Phi(T)$  si ce triangle n'est pas dégénéré.

### 2.a. COURBURE

On attribue à chaque angle de chaque triangle de  $X_0$  une mesure  $\alpha$  avec  $0 \leq \alpha \leq \pi$  qui est celle de l'angle correspondant dans  $T_\varphi$  de façon compatible avec la dégénérescence éventuelle de  $T_\varphi$ : si les 3 sommets de  $T_\varphi$  sont confondus, les  $\alpha$  sont arbitraires de somme  $\pi$ . Si le triangle est plat sans côtés de longueur nulle, 2 des  $\alpha$  valent 0, le 3<sup>e</sup>  $\pi$ , si le triangle a un côté de longueur nulle prendre les angles ayant ce côté avec la valeur  $\frac{\pi}{2}$ , etc.

On définit alors la courbure  $K_\varphi$  de chaque sommet  $i$  par  $K_\varphi(i) = 2\pi - \sum_i \alpha$ , où  $\sum_i$  désigne la somme sur les angles de sommet  $i$ .

La formule de Gauss-Bonnet donne, en notant par  $K_g$  la courbure de Gauss de  $(X, g)$ :

$$\sum_i K_\varphi(i) + \sum_T \int_{T_\varphi} K_g = 2\pi\chi(X) ;$$

en effet, pour un triangle non dégénéré, on a par Gauss-Bonnet pour un triangle géodésique que l'intégrale de la courbure vaut la somme des angles diminuée de  $\pi$ , alors que pour un triangle dégénéré cette intégrale vaut 0 et par la convention précédente la somme des angles vaut  $\pi$ . Sommant ces égalités sur tous les triangles et utilisant la relation d'Euler  $\chi(X) =$  nombre de sommets  $-$  nombre d'arêtes  $+$  nombre de faces, et le fait que pour une triangulation le nombre de faces vaut les  $\frac{2}{3}$  du nombre d'arêtes, on conclut facilement.

Comme  $\Phi$  est homotope à  $\Phi_0$ , elle est de degré 1 et l'on en déduit qu'elle est surjective. Comme  $X$  est à courbure négative ou nulle et que  $\int_X K_g = 2\pi\chi(X)$ , on a

$$(1) \quad \sum_i K_\varphi(i) \geq 0 .$$

### 2.b. DÉGÉNÉRESCENCE PONCTUELLE

Soit  $X_1$  un sous-complexe connexe complet maximal de  $X_0$  tel que la restriction de  $\Phi$  à  $X_1$  soit constante, alors:

LEMME.  $X_1$  est simplement connexe.

Preuve. D'abord il est clair que  $X_1$  ne contient pas de lacets de  $X$  non homotopes à 0, car un tel lacet deviendrait par  $\varphi$  homotope à 0.

De plus, si  $X_1$  n'était pas 1-connexe, on pourrait diminuer  $E_c$  en appliquant la partie de  $X_0$  intérieure à  $X_1$  sur le même point de  $X$  que  $\varphi(X_1)$ .  $\square$

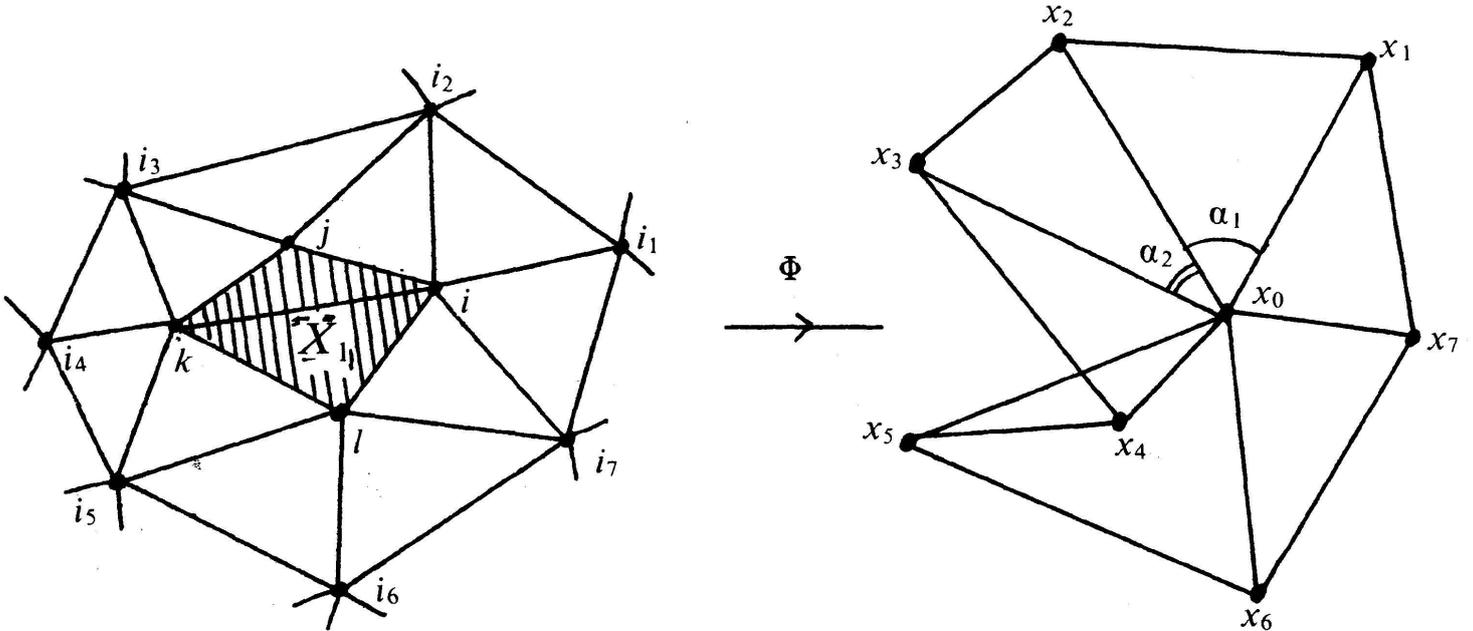


FIGURE 1

Soit  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  (fig. 1) le cycle des sommets de  $X_0$  entourant  $X_1$ ,  $x_0 = \varphi(X_1)$ ,  $x_l = \varphi(i_l)$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  les mesures des angles de sommet  $i$  dans  $X_1$  et de côtés  $(i, i_l), (i, i_{l+1})$ . Si on pose

$$K_\varphi(X_1) = 2\pi - \sum_{l=1}^{l=m} \alpha_l,$$

la formule de Gauss-Bonnet implique

$$K_\varphi(X_1) = \sum_{i \text{ sommet de } X_1} K_\varphi(i).$$

Soit  $u_l$  le vecteur unitaire tangent en  $x_0$  à l'arc géodésique orienté image par  $\varphi$  d'une arête  $(i, i_l)$  ( $i$  sommet de  $X_1$ ). Le fait que  $\varphi$  soit critique pour  $E_c$  implique l'existence de constantes  $C_l > 0$  telles que:

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_l u_l = 0.$$

Il est donc impossible que  $K_\varphi(X_1)$  soit  $> 0$ ; en effet alors l'image par  $\varphi$  du cycle  $(i_1, i_2, \dots, i_l)$  n'entourerait pas  $x_0$  et donc les vecteurs  $u_i$  seraient tous dans un demi-plan strict de l'espace tangent en  $x_0$  à  $X$  (une application continue du cercle dans lui-même qui n'est pas surjective est telle que tout point non extrémité de l'image est l'image d'au moins deux points). La relation (1) implique alors que  $K_\varphi(X_1) = 0$ , car l'ensemble des sommets de  $X$  est la réunion des sommets des complexes  $X_1$  (éventuellement réduits à un point).

Montrons maintenant que la seule possibilité pour  $X_1$  est d'être un sous-graphe linéaire de sommets consécutifs  $(j_1, j_2, \dots, j_k)$  tel que l'image des triangles de  $X_0$  ayant au moins un sommet dans  $X_1$  par  $\varphi$  soit un segment géodésique contenant  $x_0$  comme point intérieur (fig. 2).

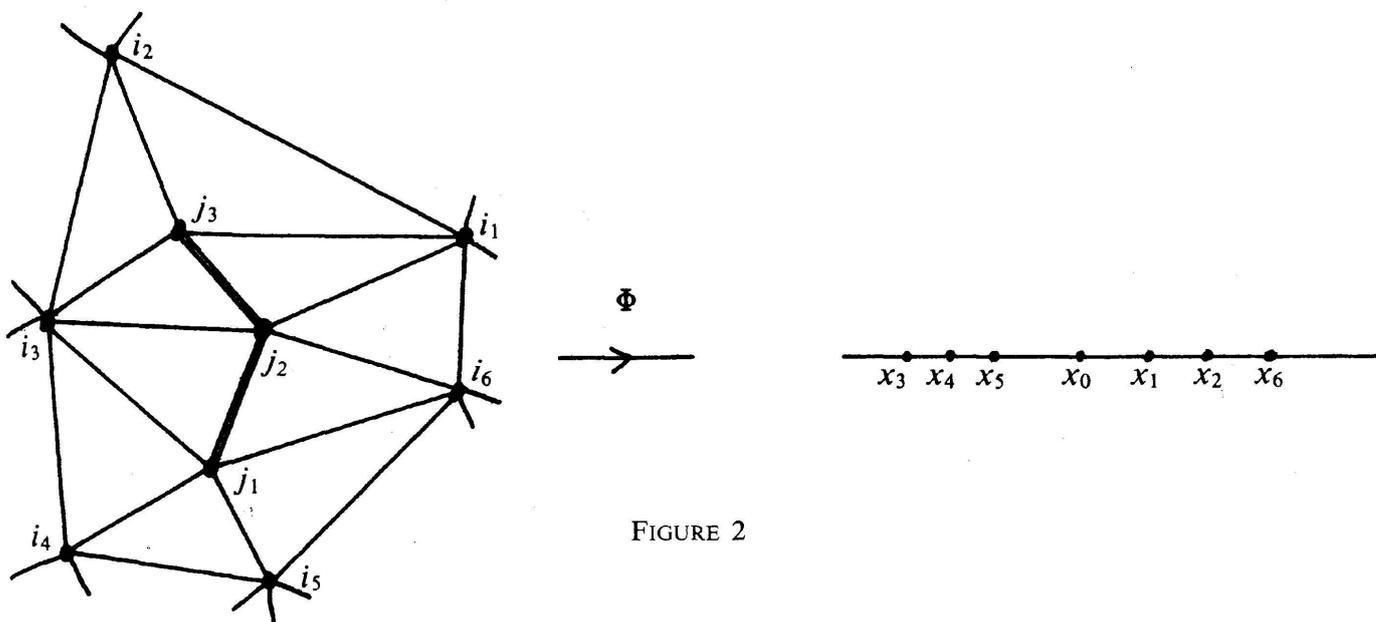


FIGURE 2

En effet, appelons *extrémal* tout sommet  $i$  de  $X_1$  tel que les cônes tangents en  $i$  à  $X_0$  et  $X_0 \setminus X_1$  soient connexes et non vides (fig. 3). Alors, on voit

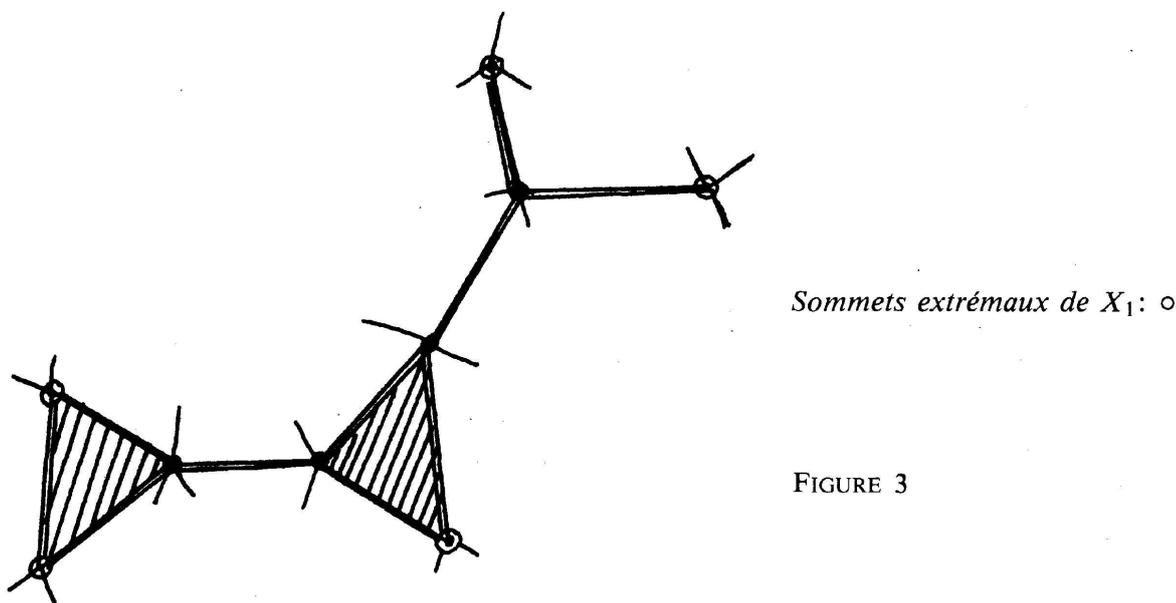


FIGURE 3

que  $X_1$  admet au moins 3 sommets extrémaux s'il n'est pas un graphe linéaire. Montrons que la somme des angles  $\alpha_i$  extérieurs à  $X_1$  ayant pour sommet un tel point extrémal est  $\geq \pi$ : en effet dans le cas contraire les vecteurs  $u_i$  correspondants seraient dans un demi-plan strict. Comme la somme totale des  $\alpha_i$  est  $2\pi$ , on en déduit le résultat annoncé: il y a au plus 2 sommets extrémaux et donc  $X_1$  est linéaire. Si  $X_1$  n'est pas réduit à un sommet unique, il est clair que la condition d'extréma pour  $E_c$  implique que les vecteurs  $u_i$  issus des extrémités sont alignés et non tous de même orientation. Les  $\alpha_i$  correspondant aux autres sommets de  $X_1$  sont alors nuls, puisque la somme totale est  $2\pi$ .

On voit ainsi que la courbure  $K_\varphi(i)$  est nulle pour tous les sommets de  $X_0$ , car les complexes  $X_1$  sont soit réduits à un point, soit des sous-graphes linéaires et dans ce dernier cas, c'est clair que la courbure  $K_\varphi$  est nulle en chaque sommet de  $X_1$ . On note que tous les triangles qui ont un sommet au moins dans  $X_1$  sont dégénérés.

## 2.c. DÉGÉNÉRESCENCE LINÉAIRE

2.c1. Soit  $X_2$  un sous-complexe connexe complet maximal de  $X_0$  tel que les images par  $\varphi$  des triangles de  $X_2$  soit dégénérés. D'après ce qui précède les arêtes issues d'un sommet de  $\partial X_2$  ont des images par  $\varphi$  non réduites à un point: les seuls « $X_1$ » possibles sont intérieurs à des « $X_2$ ».

Alors on a le:

LEMME.  $X_2$  est soit 1-connexe, soit contractible sur une courbe de  $X_0$  non homotope à 0. Dans le premier cas, l'image par  $\varphi$  de  $X_2$  est un segment de géodésique, dans le second, c'est une géodésique périodique.

*Preuve.* Il est clair d'après ce qui précède que l'image de  $X_2$  par  $\Phi$  est un arc complet d'une géodésique de  $X$ .

En effet si 2 triangles dégénérés ont un côté non réduit à un point en commun ils sont alignés, il en est de même d'après le paragraphe précédent s'ils ont un côté réduit à un point.

Les composantes connexes de  $X_0 \setminus X_2$  ne sont pas des disques topologiques car le bord de ce disque ayant une image géodésique, on peut diminuer  $E_c$  en projetant orthogonalement le disque sur cette géodésique (le faire dans le revêtement universel).

Si maintenant  $X_2$  n'est pas un disque, les composantes connexes du bord ne sont pas homotopes à 0, mais sont homotopes entre elles dans  $X$ , sinon l'image par  $\varphi$  ne pourrait être une seule géodésique.

On en déduit que  $X_2$  est soit un disque, soit un cylindre, soit un ruban de Möbius. On élimine aussi facilement le cas où  $X_2 = X$ .  $\square$

### 2.c2. Cas où $X_2$ est un disque

Dans ce cas la formule de Gauss-Bonnet donne:

$$\sum_{i \in \partial X_2} (\sum_i \alpha_{ext} - \pi) = 2\pi,$$

où  $\sum_i \alpha_{ext}$  est la somme des mesures des angles extérieurs à  $X_2$  au sommet  $i$  de  $\partial X_2$ .

De plus cette somme  $\sum_i$  ne peut valoir que  $0$ ,  $\pi$  ou  $2\pi$ , car les angles intérieurs valent tous  $0$  ou  $\pi$  et la courbure  $K_\varphi$  est  $0$ .

Le cas  $0$  est impossible car alors les triangles extérieurs de sommet  $i$  seraient dégénérés et donc feraient partie de  $X_2$ . On voit donc qu'il y a exactement 2 sommets de  $\partial X_2$  où cette somme vaut  $2\pi$  et les autres où elle vaut  $\pi$ . Montrons qu'il n'y a pas de sommets de cette sorte:

c'est clair car les arêtes extérieures en  $i$  sont situées dans un demi-espace, ce qui est impossible (condition d'extrémas), sauf si elles sont alignées avec  $\varphi(\partial X_2)$  auquel cas elles ne sont pas extérieures.

On en conclut que le bord de  $X_2$  n'a que 2 sommets, ce qui est incompatible avec le fait que  $X_0$  est un complexe simplicial: il n'y a pas 2 arêtes qui ont les mêmes extrémités.

### 2.c3. Cas où $X_2$ est un cylindre ou un ruban de Möbius

La même technique que précédemment s'étend sans difficultés.

On a donc montré que tous les triangles  $\Phi(T)$  sont non dégénérés.

### 2.d. FIN DE LA PREUVE

Il est maintenant clair que  $\Phi$  est un homéomorphisme local à l'intérieur des triangles de  $X_0$ , il reste à voir que c'est vrai près des sommets et comme  $\Phi$  est de degré 1, on en déduit que c'est un homéomorphisme global.

Comme  $K_\varphi(i)$  est nul, la seule possibilité pour que  $\Phi$  ne soit pas un homéomorphisme local en  $i$  est que l'image des triangles de sommet  $i$  soit contenue dans un angle d'ouverture  $\leq \pi$ . C'est impossible car toutes les arêtes issues de  $i$  devraient avoir une image alignée et donc les triangles de sommet  $i$  seraient dégénérés.