

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** POLYNÔMES HOMOGENES RÉELS AVEC GRADIENT À SINGULARITÉ ISOLÉE  
**Autor:** Maire, H.-M.

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59491>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_1}(1, 0, \dots, 0, x_n) = \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_1}(1, 0, \dots, 0) + 4\varepsilon x_n^2,$$

$$\frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_j}(1, 0, \dots, 0, x_n) = \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_j}(1, 0, \dots, 0), \quad 2 \leq j \leq n-1,$$

$$\frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_n}(1, 0, \dots, 0, x_n) = 4\varepsilon x_n - 4(1-\varepsilon)x_n^3.$$

Par suite,

$$(Q_\varepsilon)'(1, 0, \dots, 0, -\sqrt{\varepsilon/(1-\varepsilon)}) = (Q_\varepsilon)'(1, 0, \dots, 0, +\sqrt{\varepsilon/(1-\varepsilon)}).$$

On est de nouveau en contradiction avec l'injectivité de  $(Q_\varepsilon)'$ .

d) L'exemple (2.7) montre que  $H_{p,q}^{(m)}$  est non vide pour  $m$  pair supérieur ou égal à 6.  $\square$

*Preuve de l'application (3.2).* Il suffit de prendre  $P \in H_{p,q}^{(m)}$  et  $M$  de la forme

$$\{(x, P(x)) \mid x \in \mathbf{R}^n\}.$$

En effet, la courbure de Gauss-Kronecker est un multiple positif du déterminant hessien de  $P$  (cf. [10], p. 93).

Réciproquement, si  $M$  est une hypersurface régulière de  $\mathbf{R}^{n+1}$  avec (i) et (ii), alors  $M$  est localement le graphe de  $f: U \rightarrow \mathbf{R}$  avec  $U$  ouvert de  $\mathbf{R}^n$  contenant 0. On peut supposer  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 0$  sans changer la courbure. Développons  $f$  en parties homogènes:

$$f(x) = P(x) + O(|x|^{j+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

où  $P$  est un polynôme homogène de degré  $j \geq 2$ . On a:

$$K((x, f(x))) = h(x) \det P''(x) + O(|x|^{n(j-1)}), \quad x \rightarrow 0,$$

avec  $h(0) > 0$ . La condition (i) entraîne  $j = m$  et  $\det P''(x) \neq 0$  pour  $x \neq 0$  (on a utilisé  $|(x, f(x))| \sim |x|$ ). Donc  $P \in H_n^{(m)}$  et (ii) donne  $P \in H_{p,q}^{(m)}$ . D'après le théorème (3.1), ceci n'est pas possible si  $m = 4$  et  $p \neq 0$  et  $n$ .  $\square$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDREATTA, A. Superficie algebriche di  $S_3$  reali e con hessiana priva di punti reali. *Boll. U. Mat. It.* 15 (1960), 424-430.
- [2] ——— Communication personnelle.
- [3] FRANKLIN, J.N. *Matrix Theory*. Prentice-Hall, 1968.
- [4] GALAFASSI, V.E. Forme reali armoniche. *Istituto Lombardo* 90 (1956), 383-412.

- [5] HELFFER, B. et J. NOURRIGAT. *Hypoellipticité maximale pour des Opérateurs Polynômes de Champs de Vecteurs*. Progress in Math., Birkhäuser, 1985.
- [6] LEWY, H. A property of spherical harmonics. *American Journal of Math.* 69 (1938), 555-560.
- [7] MAIRE, H.-M. Necessary and sufficient condition for maximal hypoellipticity of  $\bar{\partial}_b$ . In *Springer Lecture Notes 1324*, Berlin 1988, 178-185.
- [8] MAWHIN, J. and M. WILLEM. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*. Springer, 1989.
- [9] SEGRE, B. Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. *Rend. Acc. Lincei 15* (1953), 237-242, 344-399.
- [10] THORPE, J.A. *Elementary Topics in Differential Geometry*. Springer, 1979.

(Reçu le 25 juin 1991)

Henri-Michel Maire

Section de Mathématiques  
2-4, rue du Lièvre  
Case postale 240  
CH-1211 Genève 24