

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** THE CATEGORY OF NILMANIFOLDS  
**Autor:** Oprea, John

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59480>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Proof.* Let  $M$  be a nilmanifold. Then

$$\begin{aligned} \dim M + 1 &= e_0(M) + 1 \\ &= e_0(M \times S^k) \text{ since } e_0 \text{ respects products} \\ &\leq \text{cat}(M \times S^k) \\ &\leq \text{cat}(M) + 1 \text{ Fox's inequality} \\ &= \dim M + 1 . \end{aligned}$$

Hence all inequalities are equalities and  $\text{cat}(M \times S^k) = \text{cat}(M) + 1$ .  $\square$

ADDED IN PROOF. By using the equality  $e_0(M) = \dim(M)$  and extending the  $e_0$ -invariant to maps, C. McCord and the author have given a proof of the Arnold Conjecture for nilmanifolds (cf. C. McCord and J. Opera, *Rational Ljusternik-Schnirelmann Category and the Arnold Conjecture for Nilmanifolds*, preprint 1992). That is, any smooth 1-periodic Hamiltonian system on a symplectic nilmanifold  $M$  has at least  $\dim(M) + 1$  contractible 1-periodic orbits.

#### REFERENCES

- [1] ABRAHAM, R. and J. R. MARSDEN. *Foundations of Mechanics*, 2nd Ed. (1985 version) Addison-Wesley, 1978.
- [2] FELIX, Y. La Dichotomie Elliptique-Hyperbolique. In *Homotopie Rationnelle, Astérisque 176*, Soc. Math. France, 1989.
- [3] FELIX, Y. and S. HALPERIN. Rational L. S. Category and Its Applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* 273 (1982), 1-73.
- [4] GRIFFITHS, P. and J. MORGAN. *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*. Progress in Math. 16, Birkhäuser, 1981.
- [5] HALPERIN, S. Finiteness in the Minimal Models of Sullivan. *Trans. Amer. Math. Soc.* 230 (1977), 173-199.
- [6] ——— *Lectures on Minimal Models*. Mémoires Soc. Math. France 9-10 (1983).
- [7] LAMBE, L. and S. PRIDY. Cohomology of Nilmanifolds and Torsionfree Nilpotent Groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 273 (1982), 39-55.
- [8] LUSTERNIK, L. and L. SCHNIRELMANN. *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*. Actualités Scientifiques et Industrielles 188, Hermann et Cie, Paris, 1934.
- [9] TOOMER, G. H. L. S. Category and the Moore Spectral Sequence. *Math. Z.* 138 (1974), 123-143.

- [10] WHITEHEAD, G. *Elements of Homotopy Theory*. Grad. Texts in Math. 61, Springer-Verlag, 1978.
- [11] EILENBERG, S. and T. GANEA. On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups. *Annals of Math.* 65, no. 3 (1957), 517-518.
- [12] HILTON, P., G. MISLIN and J. ROITBERG. *Localization of Nilpotent Groups and Spaces*. North Holland, Amsterdam, 1975.

(Reçu le 8 janvier 1991)

John Oprea

Department of Mathematics  
Cleveland State University  
Euclid Avenue at East 24th Street  
Cleveland, Ohio 44115 (USA)