

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES  
**Autor:** Hausmann, Jean-Claude  
**Kapitel:** Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59482>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES

par Jean-Claude HAUSMANN

### INTRODUCTION

Soit  $G$  un groupe de Lie compact. Une représentation  $\alpha: G \rightarrow O_{n+1}$  de  $G$  induit une action  $G \times S^n \rightarrow S^n$ . Une telle action est dite *linéaire* (ou orthogonale).

Cet article est motivé par la remarque que l'on peut se servir de  $\alpha$  pour engendrer d'autres actions sur  $S^n$ . Pour cela, considérons un plongement  $e: S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ . On suppose que l'image  $X = e(S^n)$  est invariante par l'action de  $G$  sur  $\mathbf{R}^{n+1}$ , c'est-à-dire que  $GX = X$ . Pour simplifier, nous supposons également que  $X$  englobe  $O$  (c'est-à-dire que  $O$  est dans la composante relativement compacte du complémentaire de  $X$ ). La figure 1 ci-dessous donne un

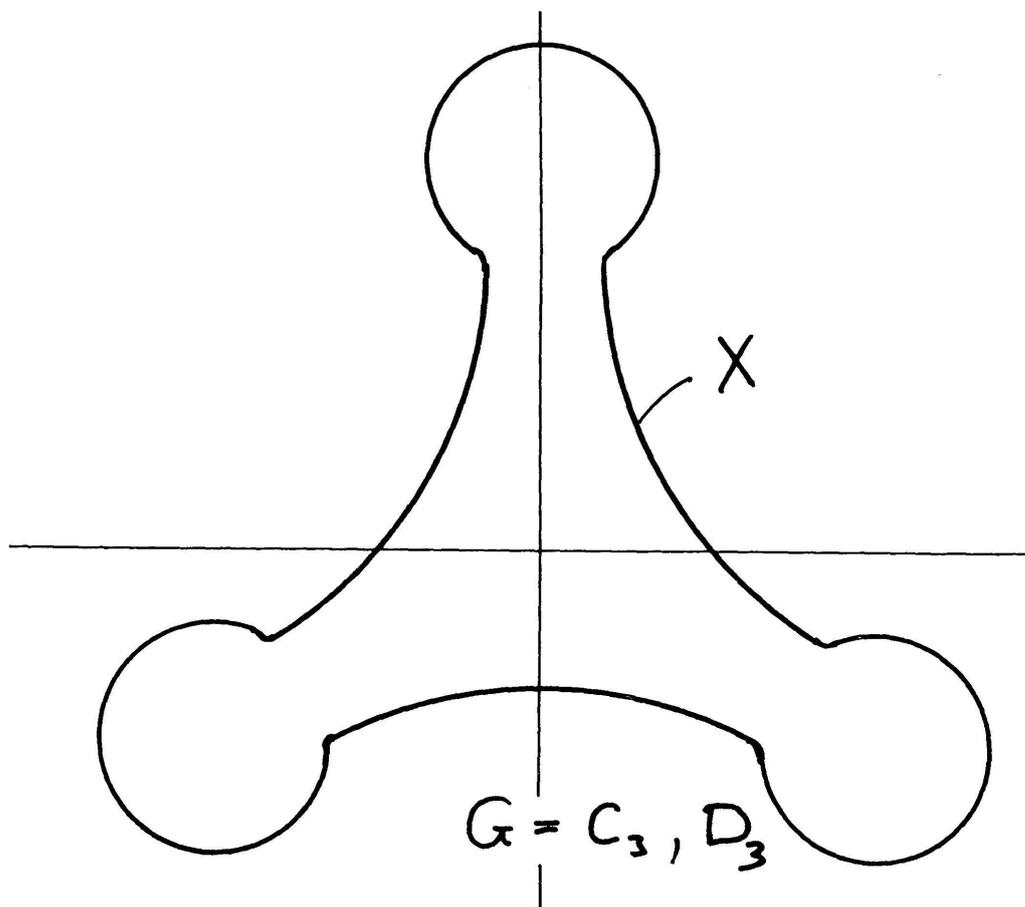


FIGURE 1

exemple pour le cas  $n = 1$ ,  $G = C_3$  (cyclique d'ordre 3) ou  $(D_3$  (dihédral). On obtient alors une nouvelle action

$$G \times S^n \rightarrow S^n$$

$$(g, x) \mapsto g * x = e^{-1}(ge(x))$$

Une telle action sera dite *quasi-linéaire* (*QL*) (d'action linéaire associée  $\alpha$ ). Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier les questions suivantes:

1) Une action *QL* est-elle toujours différentiablement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un difféomorphisme  $h: S^n \rightarrow S^n$  tel que  $g * x = h^{-1}gh(x)$ ?)

2) Une action *QL* est-elle toujours topologiquement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un homéomorphisme  $h: S^n \rightarrow S^n$  tel que  $g * x = h^{-1}gh(x)$ ?)

3) Toute action de  $G$  sur  $S^n$  est-elle différentiablement (ou topologiquement) conjuguée à une action *QL*?

On verra que la réponse à ces questions, pour différents  $n$  et  $G$ , est parfois positive, parfois négative et parfois ouverte et équivalente à un problème célèbre, par exemple la conjecture de Poincaré différentiable en dimension 4. Il est à remarquer que ces questions, dont l'énoncé est extrêmement élémentaire, mettent en jeu, pour leur résolution, une partie importante des grandes techniques de la topologie différentielle.

Des exemples naturels d'actions *QL* sont donnés au paragraphe 7. On en trouvera aussi dans [Ha2], paragraphe 4.

Je tiens à remercier P. Vogel et M. Rothenberg pour d'intéressantes discussions.

## 2. $G$ -COBORDISMES D'ACTIONS

Soit  $G$  un groupe de Lie. Nous travaillons dans la catégorie des  $G$ -variétés. Un objet de cette catégorie est une paire  $(V, \alpha)$ , où  $V$  est une variété différentiable ( $C^\infty$ ) et  $\alpha: G \times V \rightarrow V$  est une action différentiable. Une telle action définit (et est déterminée par) un homomorphisme  $G \rightarrow \text{DIFF}(V)$ , où  $\text{DIFF}(V)$  dénote le groupe des difféomorphismes de  $V$ . Cet homomorphisme sera également dénoté par  $\alpha$ . De ce point de vue, un morphisme de  $(V_1, \alpha_1)$  vers  $(V_2, \alpha_2)$  est une application différentiable  $f: V_1 \rightarrow V_2$  qui est  $G$ -équivariante, ce qui peut s'écrire  $f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$ .

Un  $G$ -cobordisme entre deux  $G$ -variétés  $(V_1, \alpha_1)$  et  $(V_2, \alpha_2)$  est une  $G$ -variété  $(B, \beta)$ , où  $(B, V_1, V_2)$  est un cobordisme (i.e.  $\partial B = V_1 \amalg V_2$ ) tel que la