Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES

Autor: Hausmann, Jean-Claude

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59482

L'Enseignement Mathématique, t. 38 (1992), p. 55-70

ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES

par Jean-Claude HAUSMANN

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie compact. Une représentation $\alpha: G \to O_{n+1}$ de G induit une action $G \times S^n \to S^n$. Une telle action est dite *linéaire* (ou orthogonale).

Cet article est motivé par la remarque que l'on peut se servir de α pour engendrer d'autres actions sur S^n. Pour cela, considérons un plongement $e: S^n \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$. On suppose que l'image $X = e(S^n)$ est invariante par l'action de G sur $\mathbf{R}^{n+1}$, c'est-à-dire que $GX = X$. Pour simplifier, nous supposerons également que X englobe O (c'est-à-dire que O est dans la composante relativement compacte du complémentaire de X). La figure 1 ci-dessous donne un

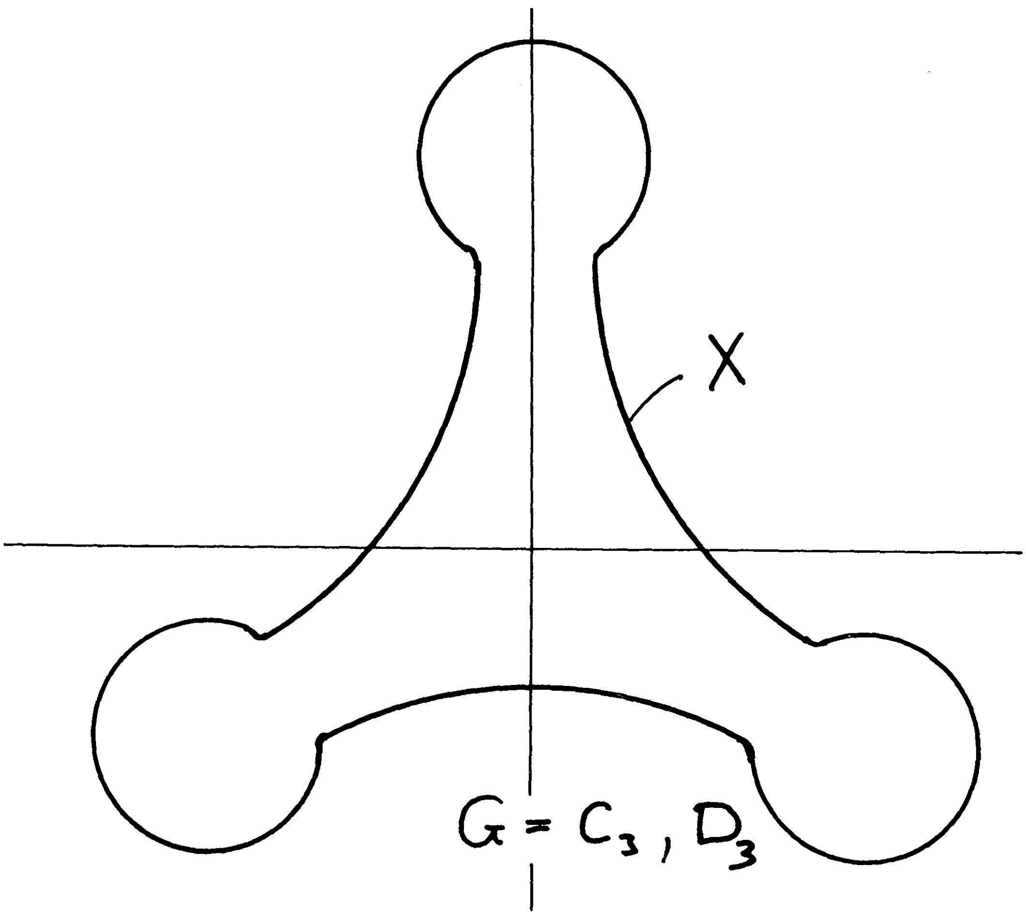

FIGURE 1

exemple pour le cas $n = 1$, $G = C_3$ (cyclique d'ordre 3) ou (D_3 (dihédral). On obtient alors une nouvelle action

$$G \times S^n \to S^n$$

$$(g,x) \mapsto g*x = e^{-1}(ge(x))$$

Une telle action sera dite *quasi-linéaire* (QL) (d'action linéaire associée α). Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier les questions suivantes:

1) Une action QL est-elle toujours différentiablement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un difféomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x)$)?)

2) Une action QL est-elle toujours topologiquement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un homéomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x)$)?)

3) Toute action de G sur S^n est-elle différentiablement (ou topologiquement) conjuguée à une action QL?

On verra que la réponse à ces questions, pour différents n et G, est parfois positive, parfois négative et parfois ouverte et équivalente à un problème célèbre, par exemple la conjecture de Poincaré différentiable en dimension 4. Il est à remarquer que ces questions, dont l'énoncé est extrêmement élémentaire, mettent en jeu, pour leur résolution, une partie importante des grandes techniques de la topologie différentielle.

Des exemples naturels d'actions QL sont donnés au paragraphe 7. On en trouvera aussi dans [Ha2], paragraphe 4.

Je tiens à remercier P. Vogel et M. Rothenberg pour d'intéressantes discussions.

2. G-COBORDISMES D'ACTIONS

Soit G un groupe de Lie. Nous travaillons dans la catégorie des G-variétés. Un objet de cette catégorie est une paire (V, α), où V est une variété différentiable (C^∞) et α: $G \times V \to V$ est une action différentiable. Une telle acton définit (et est déterminée par) un homomorphisme $G \to \mathrm{DIFF}(V)$, où $\mathrm{DIFF}(V)$ dénote le groupe des difféomorphismes de V. Cet homomorphisme sera également dénoté par α. De ce point de vue, un morphisme de (V_1, α_1) vers (V_2, α_2) est une application différentiable f: $V_1 \to V_2$ qui est G-équivariante, ce qui peut s'écrire $f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$.

Un *G-cobordisme* entre deux G-variétés (V_1, α_1) et (V_2, α_2) est une G-variété (B, β), où (B, V_1, V_2) est un cobordisme (i.e. $\partial B = V_1 \amalg V_2$) tel que la