

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES  
**Autor:** Hausmann, Jean-Claude  
**Kapitel:** 4. Actions libres d'un groupe cyclique fini  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59482>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Démonstration de a) pour  $G = S^3$ .* On procède exactement comme dans le cas de  $S^1$ . Le rôle de  $\mathbf{CP}^k$  est remplacé par l'espace projectif quaternionien  $\mathbf{HP}^k$ . Tout  $S^3$ -fibré sur un complexe de dimension  $4k$  est induit du fibré de Hopf  $S^n \rightarrow \mathbf{HP}^k$ . On a donc un morphisme de  $S^3$ -fibrés:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbf{HP}^k & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbf{HP}^k \end{array}$$

et la classe d'homotopie de  $f$  représente la seconde classe de Chern  $c_2(\xi) \in H^4(\mathbf{HP}^k; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ . Comme  $\pi_3(S^n) = 0$ , on déduit, comme dans le cas précédent que  $c_2(E') = \pm 1$  et donc  $f$  est homotope à un difféomorphisme (donc  $\tilde{f}$  à un difféomorphisme équivariant).

*Démonstration de b.* Elle est en tout point semblable à celle de a).

*Démonstrations de c) et d).* Supposons que  $\alpha$  est  $QL$  associée à l'action linéaire  $\alpha'$ . Soit  $(B, \beta)$  un  $G$ -cobordisme  $G$ -inversible à droite, entre  $(S^n, \alpha')$  et  $(S^n, \alpha)$  comme construit dans la démonstration du théorème (2.1). On vérifie sur la construction que l'action de  $G$  sur  $B$  est libre. Comme  $B$  est un  $h$ -cobordisme, le quotient  $W = G \backslash B$  est donc un  $h$ -cobordisme entre  $V_{\alpha'}$  et  $V_{\alpha}$ . Par le lemme (3.3), on a un difféomorphisme de  $H V_{\alpha} \times ]0, \infty [ \rightarrow V_{\alpha'} \times ]0, \infty [$ .

Pour terminer la démonstration, il suffit de construire un difféomorphisme  $G$ -équivariant  $h: (S^n \times ]0, \infty [, \alpha) \rightarrow (S^n \times ]0, \infty [, \alpha')$  (actions produit). En effet, comme  $(S^n \times ]0, \infty [, \alpha')$  est  $G$ -difféomorphe à  $(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}, \alpha')$  (puisque  $\alpha'$  est linéaire),  $h|_{S^n \times \{0\}}$  sera alors un plongement  $S^1$ -équivariant de  $(S^n, \alpha)$  dans  $(\mathbf{R}^{n+1}, \alpha')$ , ce qui montre que  $\alpha$  est  $QL$  associée à  $\alpha'$ .

Le difféomorphisme  $h$  se construit de la même manière que dans le cas a) (remplaçant  $V_{\alpha}$  par  $V_{\alpha} \times \mathbf{R}$ , etc. les détails sont laissés au lecteur. Enfin, si  $h: V_{\alpha} \times \mathbf{R} \rightarrow V_{\alpha'} \times \mathbf{R}$  est un difféomorphisme, le cobordisme entre  $h(V_{\alpha} \times \{0\})$  et  $V_{\alpha'} \times \{t\}$ , pour  $t$  assez grand, est clairement un  $h$ -cobordisme.

#### 4. ACTIONS LIBRES D'UN GROUPE CYCLIQUE FINI

Soit  $C_q$  le groupe cyclique d'ordre  $q$ . Dans ce paragraphe, nous allons démontrer les deux théorèmes suivants:

(4.1) THÉORÈME. *Si  $q = 2, 3, 4$  ou  $6$ , toute action  $QL$  libre de  $C_q$  sur  $S^n$  ( $n \geq 5$ ) est différentiablement conjuguée à son action linéaire associée.*

(4.2) THÉORÈME. Soit  $\alpha$  une action linéaire libre de  $C_q$  sur  $S^n$ . Supposons que  $q \neq 2, 3, 4$  ou  $6$  et  $n \geq 5$ . Alors il existe une infinité dénombrable d'actions  $QL$  de  $C_q$  sur  $S^n$  associées à  $\alpha$ , qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées et dont aucune n'est topologiquement conjuguée à une action linéaire.

*Démonstration de (4.1).* Soit  $\alpha$  une action linéaire libre de  $C_q$  sur  $S^n$  et  $\alpha'$  une action  $QL$  associée à  $\alpha$ . Par le théorème (3.1) cas c), les variétés quotient  $V_\alpha$  et  $V_{\alpha'}$  sont  $h$ -cobordantes. Si  $q = 2, 3, 4$  ou  $6$ , le groupe de Whitehead  $Wh(C_q)$  est nul [Co], (11.5). Comme  $\pi_1(V_\alpha) = C_q$  et  $n \geq 5$ , le théorème du  $s$ -cobordisme [Ke], p. 32 assure que  $V_\alpha$  et  $V_{\alpha'}$  sont difféomorphes. Les actions  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont donc différemment conjuguées par le cas a) du théorème (3.1).

*Démonstration de (4.2).* Si  $q \neq 2, 3, 4$  ou  $6$ , le groupe de Whitehead  $Wh(C_q)$  est infini dénombrable ([Co], (11.5)). Pour chaque  $\gamma \in Wh(C_q)$ , il existe un  $h$ -cobordisme  $(W_\gamma, V_\alpha, V_{\alpha(\gamma)})$  dont la torsion de Whitehead  $\tau(W_\gamma, V_\alpha) = \gamma \in Wh(V_\alpha)$  ([Ke], p. 32). Le revêtement universel  $\tilde{W}_\gamma$  de  $W_\gamma$  est un  $h$ -cobordisme entre  $S^n$  et  $V_{\alpha(\gamma)}$ . Par le théorème du  $h$ -cobordisme, on en déduit que  $V_{\alpha(\gamma)}$  est difféomorphe à  $S^n$ , ce qui donne une action  $QL$   $\alpha(\gamma)$  sur  $S^n$  associée à  $\alpha$  (par le cas c) du théorème (3.1)).

Nous affirmons que les classes de conjugaison topologique de ces  $(S^n, \alpha(\gamma))$  contiennent au plus un nombre fini d'éléments. En effet, dans le cas contraire, on aurait, pour une collection infinie de  $\gamma \in Wh(C_q)$ , un homéomorphisme  $h_\gamma$  de  $V_{\alpha(\gamma)}$  sur une variété fixe  $A$ . Soit  $g_\gamma: V_\alpha \rightarrow V_{\alpha(\gamma)}$  la composition de l'inclusion  $V_\alpha \subset W_\gamma$  avec la rétraction de  $W_\gamma$  sur  $V_{\alpha(\gamma)}$ , et soit  $f_\gamma: V_\alpha \rightarrow A$  l'équivalence d'homotopie  $f_\gamma = h_\gamma \circ g_\gamma$ . Comme  $\tau(h_\gamma) = 0$  [Co], p. 102, on a

$$\tau(f_\gamma) = h_{\gamma*}(\tau(g_\gamma)) = h_{\gamma*}(\gamma + (-1)^{n+1}\bar{\gamma})$$

(voir [Mi], p. 401). Dans  $Wh(C_q)$  on a  $\gamma = \bar{\gamma}$  par [Mi], Lemma 6.7 et [Co], 11.5. D'où  $\tau(f_\gamma) = h_{\gamma*}(2\gamma)$ . On en déduit que pour une infinité de  $\gamma$ , les applications  $f_\gamma$  sont deux-à-deux non-homotopes. Ceci contredit le fait, facilement visible par la théorie des obstructions, que l'ensemble des classes d'homotopie d'équivalences d'homotopie de  $V_\alpha$  dans  $A$  est fini.

On peut donc extraire un ensemble dénombrable  $\Omega$  de  $(S^n, \alpha(\gamma))$  qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées. Les classes de conjugaison de représentations linéaires de  $C^q$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  étant en nombre fini, seul un sous-ensemble fini de  $\Omega$  peut donc être constitué d'actions topologiquement conjuguées à une action linéaire.

(4.3) *Remarques.*

a) Les actions du théorème (4.2) sont essentiellement celles construites par Milnor [Mi2]. A l'époque, on ne disposait pas de l'invariance topologique de la torsion de Whitehead, ce qui empêchait Milnor de déduire qu'elles n'étaient pas topologiquement conjuguées à une action linéaire.

b) La démonstration de (4.2) se généralise au cas d'actions libres d'un groupe fini  $G$  sur  $S^n$ , pourvu que  $Wh(G)$  contienne une infinité d'éléments  $\tau$  tels que  $\tau = \bar{\tau}$ . C'est, par exemple le cas du groupe du dodécaèdre à 120 éléments (voir [Ha], chapitre 5) qui agit librement sur  $S^{4k-1}$ .

c) Il est connu que le groupe de chirurgie  $L_2(C_q)$  est infini si  $q > 2$  [Ba]. On déduit alors de la suite exacte de la chirurgie (et de la théorie du lissage) pour un espace lenticulaire  $V^6$  avec groupe fondamental  $C_q$  qu'il existe une infinité dénombrable de variétés  $W^6$  homotopiquement équivalente à  $V$  qui sont deux-à-deux non-topologiquement  $h$ -cobordantes. Leurs revêtements universels sont des sphères d'homotopie de dimension 6 donc difféomorphes à  $S^6$ . Cet argument montre que pour  $q > 2$ , il existe une infinité d'actions libres de  $C_q$  sur  $S^6$  qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées et dont aucune n'est topologiquement conjuguée à une action  $QL$ .

5. ACTIONS LIBRES DE  $S^1$ 

Nous commencerons par les actions libres de  $S^1$  sur  $S^3$ .

(5.1) PROPOSITION. *Toute action libre de  $S^1$  sur  $S^3$  est différemment conjuguée à l'action standard.*

*Démonstration.* Une action libre de  $S^1$  sur  $S^3$  donne un fibré principal  $p: S^3 \rightarrow S^1 \backslash S^3 = V$  (voir le paragraphe 3). On en déduit que  $V$  est une surface qui, par suite exacte du fibré  $p$  est simplement connexe. Il s'en suit que  $V$  est difféomorphe à  $S^2$ . Le fibré  $p$  est induit du fibré de Hopf par une application  $f: V \rightarrow S^2$ . Comme dans la démonstration du cas a) du théorème (3.1), on déduit que le degré de  $f$  est  $\pm 1$  et donc  $f$  est homotope à un difféomorphisme. Ce difféomorphisme se relève, au niveau des espaces totaux, en un difféomorphisme  $S^1$ -équivariant qui conjugue notre action de départ avec l'action standard.

(5.2) THÉORÈME. *Toute action libre  $QL$  de  $S^1$  sur  $S^n$ , avec  $n \geq 7$ , est différemment conjuguée à l'action standard.*