

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION DE WEIERSTRASS
Autor: Baouche, A. / Dubuc, S.
Kapitel: 2. Cas où b est un entier impair
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-59484>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La non-dérivabilité de la fonction f en tout point x est une conséquence simple de ce théorème. L'inégalité en conclusion empêche les quotients différentiels au point x d'être bornés. Nous présentons deux démonstrations de ce théorème. La première démonstration, élémentaire, n'est cependant valide que pour la fonction de Weierstrass $C(x)$ et que si b est un entier impair. La seconde démonstration relativement courte et un peu magique considère le cas général où b est un nombre réel supérieur à $1/a$.

2. CAS OÙ b EST UN ENTIER IMPAIR

Soient $m \geq 1$ un entier, $x \in \mathbf{R}$ et k un entier tel que $|b^m x / (2\pi) - k| \leq 1/2$. Posons $t = 2\pi k / b^m$ et $h = \pi / (2b^m)$. On a alors

$$C(t-h) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n(t-h), \quad C(t+h) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n(t+h),$$

$$C(t) = \sum_{n=0}^{m-1} a^n \cos b^n t + a^m / (1-a).$$

Par suite

$$2C(t) - C(t-h) - C(t+h) = A + 2a^m / (1-a),$$

avec

$$A = \sum_{n=0}^{m-1} 2a^n (\cos b^n t) (1 - \cos b^n h) \geq - \sum_{n=0}^{m-1} 2a^n (1 - \cos b^n h).$$

Comme $1 - \cos \beta \leq \beta^2/2$, on obtient donc:

$$\begin{aligned} A &\geq - \sum_{n=0}^{m-1} a^n (b^n h)^2 = - h^2 \{ (ab^2)^m - 1 \} / (ab^2 - 1) \\ &> - h^2 (ab^2)^m / (ab^2 - 1). \end{aligned}$$

Finalement on a

$$2C(t) - C(t+h) - C(t-h) > a^m c,$$

où $c = 2/(1-a) - \pi^2/[4(ab^2-1)]$ est positif. En effet on a

$$c = \{8(ab^2-1) - \pi^2(1-a)\} / \{4(1-a)(ab^2-1)\}$$

et comme le dénominateur est toujours positif, c est du même signe que le numérateur. On a $ab > 1$, d'où $8ab^2 + \pi^2 a > 8b + \pi^2/b$. Pour b entier plus

grand que 1, on a $8b + \pi^2/b > 8 + \pi^2$, car l'équation $8b^2 - (8 + \pi^2)b + \pi^2 = 0$ a deux racines $b = 1$ et $b = \pi^2/8$.

Par ailleurs on a aussi que

$$\begin{aligned} & 2C(t) - C(t-h) - C(t+h) \\ &= 2(C(t) - C(x)) + (C(x) - C(t-h)) + (C(x) - C(t+h)). \end{aligned}$$

Un des trois membres $C(t) - C(x)$, $C(x) - C(t+h)$, $C(x) - C(t-h)$ est donc supérieur à $ca^m/4$. Donc on peut trouver un point x_m tel que $|C(x_m) - C(x)| > ca^m/4$ et $|x_m - x| \leq 3\pi/(2b^m)$.

Soit $\delta \in]0, 1[$. On peut trouver un entier m tel que $3\pi/(2b^m) \leq \delta < 3\pi/(2b^{m-1})$. En se servant de cette dernière inégalité et de l'identité $(1/b)^\alpha = a$, on obtient que $|C(x_m) - C(x)| > ac(2\delta/(3\pi))^\alpha/4$. Pour $\varepsilon = ac(2/(3\pi))^\alpha/4$, le théorème est vérifié.

3. CAS GÉNÉRAL

a) Sans faire d'autre hypothèse sur b que $b > 1/a$, nous démontrons le théorème pour la fonction de Weierstrass $f(x) = C(x)$.

Soient L, N et m des entiers positifs vérifiant

$$b^L < N\pi \quad \text{et} \quad L < m.$$

Nous introduisons la quantité

$$I = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} C(t) \cos b^m t dt$$

où h vaut $N\pi/b^m$.

$$I = a^m + \sum_{n \neq m, n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} + \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m} \right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N.$$

Nous ferons appel aux inégalités $|\sin b^n h| \leq 1$ si $n \geq m - L$ et $|\sin b^n h| \leq b^n h$ si $n < m - L$. On a

$$|I - a^m| \leq \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^n} + \sum_{n \neq m, n=m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{|b^n - b^m| h}.$$