

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE VERSION NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES DE LIE: LES ALGÈBRES DE LEIBNIZ
Autor: Loday, Jean-Louis
Kapitel: 9. Homologie non commutative des algèbres associatives
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60428>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

de l'homotopie rationnelle «non commutative». Ceci amène immédiatement un certain nombre de questions naturelles: existence de modèles minimaux, analogue non commutatif des cogèbres cocommutatives, analogue des groupes simpliciaux (cf. 10 et 11), etc.

9. HOMOLOGIE NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES ASSOCIATIVES

Soit A une algèbre associative unitaire sur k . On suppose que k contient \mathbf{Q} . Les énoncés et conjectures qui suivent peuvent s'exprimer en utilisant comme coefficients un A -bimodule M , mais, pour simplifier, on prendra ici $M = A$.

9.1. *Rappel du cas classique* (cf. par exemple [L1]). Le complexe de Hochschild (C_*, b) , où $C_n = A \otimes A^{\otimes n}$, d'homologie $HH_n(A)$, possède les propriétés suivantes. Pour tout A les idempotents eulériens permettent de scinder C_n en

$$C_n = C_n^{(1)} \oplus C_n^{(2)} \oplus \dots \oplus C_n^{(n)}.$$

(9.1.1) Si A est commutative, $C_*^{(1)}$ est un sous-complexe de C_* , et son homologie n'est autre que l'homologie de Harrison-André-Quillen.

(9.1.2) Si A est commutative et lisse sur k , alors $HH_n^{(1)}(A) = 0$ pour $n > 1$ et $HH_1^{(1)}(A) = \Omega_{A/k}^1$. Pour l'homologie de Hochschild on a alors le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg:

$$HH_*(A) \cong \Lambda_A(H_*^{(1)}(A)) = \Omega_{A/k}^*,$$

où $\Omega_{A/k}^n$ désigne le module des n -formes différentielles de Kaehler.

(9.1.3) Le module $C_n^{(n)}$ est isomorphe à $A \otimes \Lambda^n A$ ($M \otimes \Lambda^n A$ dans la version bimodule), et la restriction du bord de Hochschild b à $C_n^{(n)}$ aboutit dans $C_{n-1}^{(n-1)}$. On a alors un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} C_n^{(n)} & \xrightarrow{b} & C_{n-1}^{(n-1)} \\ \parallel \wr & & \parallel \wr \\ A \otimes \Lambda^n A & \xrightarrow{d} & A \otimes \Lambda^{n-1} A, \end{array}$$

dans lequel d est le bord de Chevalley-Eilenberg (cf. 6.6) pour la structure d'algèbre de Lie de A donnée par $[x, y] = xy - yx$.

9.2. *Conjecture pour le cas non commutatif.* On conjecture qu'il existe un complexe $CL_* = (CL_*(A), \tilde{b})$, et donc des groupes d'homologie $HL_*(A)$, ayant les propriétés suivantes.

(9.2.0) Il existe une application naturelle non triviale

$$\mu: HL_*(A) \rightarrow HH_*(A) .$$

(9.2.1) Pour tout n le module CL_n admet une décomposition

$$CL_n = CL_n^{(1)} \oplus CL_n^{(2)} \oplus \dots \oplus CL_n^{(n)} .$$

Le complexe $CL_*^{(1)}$ est un sous-complexe de CL_* , et son homologie est précisément l'homologie de Hochschild $HH_n(A)$ pour $n \geq 1$.

(9.2.2) Si l'algèbre associative et unitaire A est *quasi-libre* au sens de Cuntz-Quillen (cf. [C-Q]), on sait que $HH_n(A) = 0$ pour $n > 1$, et que $HH_1(A) = A \otimes (A/k)$. Adoptons les notations de Cuntz et Quillen: $\Omega^n A := A \otimes (A/k)^{\otimes n}$ (n -formes différentielles non commutatives sur A). La théorie HL devrait vérifier

$$HL_n(A) = T_A(H_*^{(1)}(A)) \stackrel{\cdot}{=} \Omega^n A .$$

(9.2.3) La composante $CL_n^{(n)}$ devrait être isomorphe à $A \otimes A^{\otimes n}$ (plus précisément $M \otimes A^{\otimes n}$ dans la version bimodule), et on devrait avoir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CL_n^{(n)} & \xrightarrow{\tilde{b}} & CL_{n-1}^{(n-1)} \\ \parallel \iota & & \parallel \iota \\ A \otimes A^{\otimes n} & \xrightarrow{d} & A \otimes A^{\otimes n-1} , \end{array}$$

où d est le bord de Leibniz pour la structure de Leibniz de A donnée par $[x, y] = xy - yx$.

9.3. *Remarque.* Il y a fort à penser que les groupes $HL_*(A)$ sont en fait définis sur une catégorie plus large que celle des algèbres associatives unitaires. De même qu'une algèbre associative définit une algèbre de Lie, tout objet de cette catégorie devrait définir une algèbre de Leibniz.