

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**Kapitel:** 1.1. Cogèbres  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

On note  $\text{Alg}_K$  la catégorie des anneaux commutatifs  $K_1$  munis d'un morphisme  $K \rightarrow K_1$ .

L'application identique d'un ensemble  $X$  est notée  $1_X$  (ou simplement 1 si aucune confusion sur  $X$  n'est à craindre).

## §1. COGÈBRES ET COMODULES (GÉNÉRALITÉS)

### 1.1. COGÈBRES

Dans tout ce paragraphe,  $C$  désigne une *cogèbre*, de coproduit  $d$ , possédant une co-unité (à droite et à gauche)  $e$ . Rappelons (cf. *Alg.* III) ce que cela signifie:

$C$  est un module (sur  $K$ );

$d$  est une application linéaire de  $C$  dans  $C \otimes C$ ;

$e$  est une forme linéaire sur  $C$ .

De plus, ces données vérifient les axiomes suivants:

( $C_1$ ) (Coassociativité) Les applications linéaires  $(1_C \otimes d) \circ d$  et  $(d \otimes 1_C) \circ d$  de  $C$  dans  $C \otimes C \otimes C$  coïncident.

( $C_2$ ) (Co-unité)  $(1_C \otimes e) \circ d = 1_C$  et  $(e \otimes 1_C) \circ d = 1_C$ .

### *Exemples*

(1) Soit  $C$  une cogèbre de co-unité  $e$ . En composant le coproduit de  $C$  avec la symétrie canonique de  $C \otimes C$ , on obtient une seconde structure de cogèbre sur  $C$ , dite *opposée* de la première. On la note  $C^o$ ; la co-unité de  $C^o$  est  $e$ .

(2) Toute somme directe de cogèbres a une structure naturelle de cogèbre. En particulier, 0 est une cogèbre.

(3) Supposons que  $C$  soit projectif de type fini (comme  $K$ -module), et soit  $A$  son dual. Comme le dual de  $C \otimes C$  s'identifie à  $A \otimes A$ , toute structure de cogèbre sur  $C$  correspond à une structure d'*algèbre associative* sur  $A$ , et réciproquement. Pour que  $e \in A$  soit co-unité de  $C$ , il faut et il suffit que ce soit un élément unité (à gauche et à droite) pour  $A$ .

(Lorsque  $K$  est un corps, on verra plus loin que toute cogèbre est limite inductive de cogèbres obtenues par ce procédé.)

(4) Soit  $V$  un module projectif de type fini. Soit

$$C = \text{End}(V) = V \otimes V' .$$

La forme bilinéaire  $\text{Tr}(uv)$  met  $C$  en dualité avec lui-même; appliquant la méthode de l'exemple précédent, on voit que la structure d'algèbre de  $C$  définit par dualité une structure de *cogèbre* sur  $C$ , de co-unité la trace  $\text{Tr}: C \rightarrow K$ . En particulier  $M_n(K)$  a une structure de cogèbre canonique, pour laquelle on a

$$d(E_{ij}) = \sum_k E_{kj} \otimes E_{ik}.$$

(La cogèbre *opposée* est plus sympathique, cf. exercice 1.)

(5) Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux cogèbres, de coproduits  $d_1$  et  $d_2$  et de co-unités  $e_1$  et  $e_2$ . Soit  $\sigma$  l'isomorphisme canonique de  $C_2 \otimes C_1$  sur  $C_1 \otimes C_2$ ; le composé

$$(1_{C_1} \otimes \sigma \otimes 1_{C_2}) \circ (d_1 \otimes d_2)$$

munit  $C_1 \otimes C_2$  d'une structure de cogèbre, dite *produit tensoriel* de celles de  $C_1$  et  $C_2$ ; elle admet pour co-unité  $e_1 \otimes e_2$ .

(6) L'algèbre affine d'un schéma en monoïdes affine sur  $K$  a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 3.1.

## 1.2. COMODULES

DÉFINITION 1. On appelle *comodule (à gauche) sur  $C$*  tout module  $E$  muni d'une application linéaire  $d_E: E \rightarrow C \otimes E$  vérifiant les axiomes suivants:

(1) Les applications linéaires  $(d \otimes 1_E) \circ d_E$  et  $(1_C \otimes d_E) \circ d_E$  de  $E$  dans  $C \otimes C \otimes E$  coïncident.

(2)  $(e \otimes 1_E) \circ d_E = 1_E$ .

L'application  $d_E$  s'appelle le *coproduit* de  $E$ ; on se permet souvent de le (la) noter  $d$ .

### Remarques

1) Il y a une notion analogue de comodule *à droite*; on laisse au lecteur le soin de l'explicitier (ou de remplacer la cogèbre  $C$  par son opposée  $C^\circ$ ). [Le rédacteur s'est aperçu trop tard qu'il était plus commode d'échanger droite et gauche, i.e. d'appeler «comodules à droite» ceux de la définition 1.]

2) Toute application linéaire  $d_E: E \rightarrow C \otimes E$  définit de manière évidente une application linéaire  $d_E^1: E \otimes E' \rightarrow C$ . Lorsque  $E$  est un  $K$ -module projectif de type fini, l'application  $d_E \mapsto d_E^1$  est un isomorphisme de  $\text{Hom}(E, C \otimes E)$  sur  $\text{Hom}(E \otimes E', C)$ . Or  $E \otimes E' = \text{End}(E)$  a une structure naturelle de cogèbre, cf. n° 1.1, Exemple 4). On peut vérifier (cf. exercice 1) que  $d_E$  vérifie les axiomes (1) et (2) si et seulement si  $d_E^1$  est