Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES

Autor: Serre, Jean-Pierre

Kapitel: 1.3. Une formule d'adjonction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60413

1.3. Une formule d'adjonction

On conserve les notations précédentes. Soit V un K-module; d'après le n° 1.2, Exemples 1 et 3, on a une structure naturelle de comodule sur $C \otimes V$, le coproduit correspondant étant $d \otimes 1_V$.

Soit d'autre part E un comodule. Définissons une application linéaire

$$\theta : \operatorname{Hom}(E, V) \to \operatorname{Hom}^C(E, C \otimes V)$$

par

$$\theta(g) = (1_C \otimes g) \circ d_E , \quad \text{si} \quad g \in \operatorname{Hom}(E, V) .$$

Cela a un sens, car d_E est un morphisme de E dans $C \otimes E$, et $1_C \otimes g$ est un morphisme de $C \otimes E$ dans $C \otimes V$.

Proposition 1. *L'application* $\theta : \operatorname{Hom}(E, V) \to \operatorname{Hom}^C(E, C \otimes V)$ *est un isomorphisme.*

Soit $f : E \to C \otimes V$ un morphisme. En composant f avec $e \otimes 1_V$: $C \otimes V \to V$, on obtient un élément $\varepsilon(f)$ de $\operatorname{Hom}(E, V)$. On a ainsi défini une application linéaire

$$\varepsilon : \operatorname{Hom}^C(E, C \otimes V) \to \operatorname{Hom}(E, V)$$

et il suffit de prouver que θ et ε sont inverses l'un de l'autre. Tout d'abord, si $g \in \operatorname{Hom}(E, V)$, on a:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\theta(g)) &= (e \otimes 1_V) \circ \theta(g) = (e \otimes 1_V) \circ (1_C \otimes g) \circ d_E \\ &= (e \otimes g) \circ d_E = g \circ (e \otimes 1_E) \circ d_E \\ &= g \circ 1_E = g ,\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\varepsilon \circ \theta = 1$.
D'autre part, si $f \in \operatorname{Hom}^C(E, C \otimes V)$, on a:

$$\begin{aligned}\theta(\varepsilon(f)) &= (1_C \otimes \varepsilon(f)) \circ d_E = (1_C \otimes ((e \otimes 1_V) \circ f)) \circ d_E \\ &= (1_C \otimes e \otimes 1_V) \circ (1_C \otimes f) \circ d_E \\ &= (1_C \otimes e \otimes 1_V) \circ (d \otimes 1_V) \circ f \\ &= (((1_C \otimes e) \circ d) \otimes 1_V) \circ f \\ &= (1_C \otimes 1_V) \circ f = f ,\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\theta \circ \varepsilon = 1$, cqfd.

[Ce qui précède est un bon exemple d'un principe général: tout calcul relatif aux cogèbres est trivial et incompréhensible.]

Exemples

1) Prenons $V = E$ et $g = 1_E$; l'élément correspondant de $\mathrm{Hom}^C(E, C \otimes E)$ est le coproduit $d_E : E \to C \otimes E$.

2) Prenons $V = K$. On obtient une bijection $\theta : E' \to \mathrm{Hom}^C(E, C)$. La bijection réciproque associe à tout morphisme $f : E \to C$ la forme linéaire $e \circ f$.

1.4. Conséquences d'une hypothèse de platitude

A partir de maintenant, on suppose que C est *plat* (comme K-module). Si V est un sous-module d'un module W, on identifie $C \otimes V$ au sous-module correspondant de $C \otimes W$, et $C \otimes (W/V)$ à $(C \otimes W)/(C \otimes V)$.

Définition 3. *Soit E un C-comodule, et soit V un sous-module de E. On dit que V est stable par C (ou que c'est un sous-comodule de E) si d_E applique V dans $C \otimes V$.*

Si tel est le cas, on vérifie tout de suite que l'application $d_V : V \to C \otimes V$ induite par d_E fait de V un comodule (d'où la terminologie); on définit de même le comodule quotient E/V.

Exemples

1) Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules du comodule E. Si les V_i sont stables par C, il en est de même de $\sum_{i \in I} V_i$ (resp. de $\bigcap_{i \in I} V_i$ lorsque I est fini). Cela résulte des formules:

$$C \otimes (\textstyle\sum V_i) = \sum (C \otimes V_i)$$

et

$$C \otimes (\textstyle\bigcap V_i) = \bigcap (C \otimes V_i)\,, \qquad I \text{ fini}\,,$$

cf. *Alg. Comm.*, chap. I, §2.

2) Si E est un comodule, le morphisme $d_E : E \to C \otimes E$ *identifie E à un sous-comodule de $C \otimes E$* (muni du coproduit $d \otimes 1_E$, cf. n° 1.3). On notera que ce sous-comodule est même *facteur direct* dans $C \otimes E$ comme K-module (mais pas en général comme comodule), en vertu de la formule (2) de la définition 1.

Proposition 2. *Soit $f : E_1 \to E_2$ un morphisme de comodules. Alors* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont stables par C; de plus, f définit par passage au quotient un isomorphisme du comodule* $E_1/\mathrm{Ker}(f)$ *sur le comodule* $\mathrm{Im}(f)$.