

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**Kapitel:** 1.3. Une formule d'adjonction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1.3. UNE FORMULE D'ADJONCTION

On conserve les notations précédentes. Soit  $V$  un  $K$ -module; d'après le n° 1.2, Exemples 1 et 3, on a une structure naturelle de comodule sur  $C \otimes V$ , le coproduit correspondant étant  $d \otimes 1_V$ .

Soit d'autre part  $E$  un comodule. Définissons une application linéaire

$$\theta: \text{Hom}(E, V) \rightarrow \text{Hom}^c(E, C \otimes V)$$

par

$$\theta(g) = (1_C \otimes g) \circ d_E, \quad \text{si } g \in \text{Hom}(E, V).$$

Cela a un sens, car  $d_E$  est un morphisme de  $E$  dans  $C \otimes E$ , et  $1_C \otimes g$  est un morphisme de  $C \otimes E$  dans  $C \otimes V$ .

PROPOSITION 1. *L'application  $\theta: \text{Hom}(E, V) \rightarrow \text{Hom}^c(E, C \otimes V)$  est un isomorphisme.*

Soit  $f: E \rightarrow C \otimes V$  un morphisme. En composant  $f$  avec  $e \otimes 1_V: C \otimes V \rightarrow V$ , on obtient un élément  $\varepsilon(f)$  de  $\text{Hom}(E, V)$ . On a ainsi défini une application linéaire

$$\varepsilon: \text{Hom}^c(E, C \otimes V) \rightarrow \text{Hom}(E, V)$$

et il suffit de prouver que  $\theta$  et  $\varepsilon$  sont inverses l'un de l'autre. Tout d'abord, si  $g \in \text{Hom}(E, V)$ , on a:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta(g)) &= (e \otimes 1_V) \circ \theta(g) = (e \otimes 1_V) \circ (1_C \otimes g) \circ d_E \\ &= (e \otimes g) \circ d_E = g \circ (e \otimes 1_E) \circ d_E \\ &= g \circ 1_E = g, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que  $\varepsilon \circ \theta = 1$ .

D'autre part, si  $f \in \text{Hom}^c(E, C \otimes V)$ , on a:

$$\begin{aligned} \theta(\varepsilon(f)) &= (1_C \otimes \varepsilon(f)) \circ d_E = (1_C \otimes ((e \otimes 1_V) \circ f)) \circ d_E \\ &= (1_C \otimes e \otimes 1_V) \circ (1_C \otimes f) \circ d_E \\ &= (1_C \otimes e \otimes 1_V) \circ (d \otimes 1_V) \circ f \\ &= (((1_C \otimes e) \circ d) \otimes 1_V) \circ f \\ &= (1_C \otimes 1_V) \circ f = f, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que  $\theta \circ \varepsilon = 1$ , cqfd.

[Ce qui précède est un bon exemple d'un principe général: tout calcul relatif aux cogèbres est trivial et incompréhensible.]

*Exemples*

1) Prenons  $V = E$  et  $g = 1_E$ ; l'élément correspondant de  $\text{Hom}^C(E, C \otimes E)$  est le coproduit  $d_E: E \rightarrow C \otimes E$ .

2) Prenons  $V = K$ . On obtient une bijection  $\theta: E' \rightarrow \text{Hom}^C(E, C)$ . La bijection réciproque associe à tout morphisme  $f: E \rightarrow C$  la forme linéaire  $e \circ f$ .

## 1.4. CONSÉQUENCES D'UNE HYPOTHÈSE DE PLATITUDE

A partir de maintenant, on suppose que  $C$  est *plat* (comme  $K$ -module). Si  $V$  est un sous-module d'un module  $W$ , on identifie  $C \otimes V$  au sous-module correspondant de  $C \otimes W$ , et  $C \otimes (W/V)$  à  $(C \otimes W)/(C \otimes V)$ .

**DÉFINITION 3.** Soit  $E$  un  $C$ -comodule, et soit  $V$  un sous-module de  $E$ . On dit que  $V$  est stable par  $C$  (ou que c'est un sous-comodule de  $E$ ) si  $d_E$  applique  $V$  dans  $C \otimes V$ .

Si tel est le cas, on vérifie tout de suite que l'application  $d_V: V \rightarrow C \otimes V$  induite par  $d_E$  fait de  $V$  un comodule (d'où la terminologie); on définit de même le comodule quotient  $E/V$ .

*Exemples*

1) Soit  $(V_i)_{i \in I}$  une famille de sous-modules du comodule  $E$ . Si les  $V_i$  sont stables par  $C$ , il en est de même de  $\sum_{i \in I} V_i$  (resp. de  $\bigcap_{i \in I} V_i$  lorsque  $I$  est fini). Cela résulte des formules:

$$\begin{aligned} C \otimes (\sum V_i) &= \sum (C \otimes V_i) \\ \text{et} \quad C \otimes (\bigcap V_i) &= \bigcap (C \otimes V_i), \quad I \text{ fini,} \end{aligned}$$

cf. *Alg. Comm.*, chap. I, §2.

2) Si  $E$  est un comodule, le morphisme  $d_E: E \rightarrow C \otimes E$  identifie  $E$  à un sous-comodule de  $C \otimes E$  (muni du coproduit  $d \otimes 1_E$ , cf. n° 1.3). On notera que ce sous-comodule est même *facteur direct* dans  $C \otimes E$  comme  $K$ -module (mais pas en général comme comodule), en vertu de la formule (2) de la définition 1.

**PROPOSITION 2.** Soit  $f: E_1 \rightarrow E_2$  un morphisme de comodules. Alors  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont stables par  $C$ ; de plus,  $f$  définit par passage au quotient un isomorphisme du comodule  $E_1/\text{Ker}(f)$  sur le comodule  $\text{Im}(f)$ .