

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1993)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÈBRES  
**Autor:** Serre, Jean-Pierre  
**Kapitel:** 3.1. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

d) *Cas général.*

Soit  $X$  l'ensemble des sous-catégories  $N$  de  $M$  telles qu'il existe  $E \in M$  avec  $N = M_E$ . L'ensemble  $X$  est ordonné filtrant puisque  $M_{E_1 \times E_2}$  contient  $M_{E_1}$  et  $M_{E_2}$ . Si  $N \in X$ , soit comme ci-dessus  $(P_N, x_N)$  un couple représentant la restriction à  $N$  du foncteur  $\nu$ , et soit  $A_N = \text{End}(P_N)$ . Si  $N_1 \supset N_2$ , il existe un unique morphisme  $P_{N_1} \rightarrow P_{N_2}$  transformant  $x_{N_1}$  en  $x_{N_2}$ ; on voit aisément que ce morphisme identifie  $P_{N_2}$  au plus grand quotient de  $P_{N_1}$  appartenant à  $N_2$ . En particulier, tout endomorphisme de  $P_{N_1}$  définit par passage au quotient un endomorphisme de  $P_{N_2}$ . D'où un homomorphisme  $A_{N_1} \rightarrow A_{N_2}$  qui est surjectif. Si  $A$  désigne l'algèbre profinie limite projective des  $A_N$ , pour  $N \in X$ , il est alors clair que la cogèbre duale de  $A$  répond à la question.

Quant à l'*unicité* de cette cogèbre (ou de l'algèbre  $A$ ), elle provient de la remarque suivante: *A est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes du foncteur  $\nu$ , munie de la topologie de la convergence simple.*

*Remarque.* Il est probablement possible d'éviter le passage par le cas  $M = M_E$ , en utilisant le théorème de Grothendieck disant qu'un foncteur exact à droite est proreprésentable: on appliquerait ce théorème à  $\nu$ , d'où  $P \in \text{Pro } M$  représentant  $\nu$  et on obtiendrait  $A$  comme l'algèbre des endomorphismes de  $P$ .

## §3. BIGÈBRES

## 3.1. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS

(Dans ce n°, ainsi que dans le suivant, on ne suppose pas que  $K$  soit un corps.)

Rappelons (cf. *Alg.* III) qu'une *bigèbre* sur  $K$  est un  $K$ -module  $C$  muni d'une structure de cogèbre  $d: C \rightarrow C \otimes C$  et d'une structure d'algèbre  $m: C \otimes C \rightarrow C$ , ces structures vérifiant l'axiome suivant:

(i) Si l'on munit  $C \otimes C$  de la structure d'algèbre produit tensoriel de celle de  $C$  par elle-même,  $d$  est un homomorphisme d'algèbres de  $C$  dans  $C \otimes C$ .

Cet axiome équivaut d'ailleurs à:

(i') L'application  $m: C \otimes C \rightarrow C$  est un morphisme de cogèbres (pour la structure naturelle de cogèbre de  $C \otimes C$ ).

Dans tout ce qui suit, nous réserverons le terme de *bigèbres* à celles vérifiant les conditions suivantes:

(ii) La cogèbre  $(C, d)$  possède une co-unité  $e: C \rightarrow K$ .

(iii) L'algèbre  $(C, m)$  est commutative, associative, et possède un élément unité 1.

(iv) La co-unité  $e: C \rightarrow K$  est un morphisme d'algèbres et  $e(1) = 1$ .

(v) On a  $d(1) = 1 \otimes 1$ .

La condition (iii) permet de considérer  $C$  comme l'*algèbre affine* d'un schéma affine  $G$  sur  $K$ ; on a  $G = \text{Spec}(C)$ . Pour tout  $K_1 \in \text{Alg}_K$ , on note  $G(K_1)$  l'ensemble des points de  $G$  à valeurs dans  $K_1$ , autrement dit l'ensemble des morphismes (au sens de  $\text{Alg}_K$ ) de  $C$  dans  $K_1$ . La condition (iv) signifie que  $e$  est un élément de  $G(K)$ . Grâce aux conditions (i) et (v), la structure de cogèbre de  $C$  peut être interprétée comme un *morphisme* de  $G \times G$  dans  $G$ , qui est *associatif* et admet  $e$  pour élément neutre. Ainsi  $G$  est un *schéma affine en monoïdes* sur  $K$ ; pour tout  $K_1 \in \text{Alg}_K$ ,  $G(K_1)$  a une structure naturelle de monoïde, d'élément neutre l'image de  $e$  dans  $G(K_1)$ , image que l'on se permet de noter encore  $e$ .

On appelle *inversion* sur  $C$ , toute application  $i: C \rightarrow C$  ayant les propriétés suivantes:

a)  $i$  est un morphisme d'algèbres, et  $i(1) = 1$ .

b)  $m \circ (1_C \otimes i) \circ d$  est égal à l'endomorphisme  $c \mapsto e(c) \cdot 1$  de  $C$ .

La condition a) permet d'interpréter  $i$  comme un morphisme  $I: G \rightarrow G$  et la condition b) signifie que  $x \cdot I(x) = e$  pour tout  $x \in G(K_1)$ , et tout  $K_1$ . On voit ainsi que, si  $i$  existe, il est unique, et que c'est un isomorphisme de  $C$  sur la bigèbre opposée  $C^\circ$ . L'existence de  $i$  revient à dire que  $G$  est un *schéma en groupes*.

*Remarque.* L'application identique  $C \rightarrow C$  est un point de  $G(C)$ , appelé *point canonique*; nous le noterons  $\gamma$ . De même, on peut interpréter une inversion  $i$  de  $C$  comme un point  $\iota$  de  $G(C)$  et la condition b) signifie que  $\gamma \iota = e$ .

### 3.2. CORRESPONDANCE ENTRE COMODULES ET $G$ -MODULES

Soit  $E$  un module. Si  $K_1 \in \text{Alg}_K$ , nous noterons  $\text{End}_E(K_1)$  le monoïde des endomorphismes du  $K_1$ -module  $K_1 \otimes E$ , et  $\text{Aut}_E(K_1)$  le groupe des éléments inversibles de  $\text{End}_E(K_1)$ . Si  $K_1 \rightarrow K_2$  est un morphisme, on définit de manière évidente le morphisme correspondant de  $\text{End}_E(K_1)$  dans  $\text{End}_E(K_2)$ . Ainsi  $\text{End}_E$  est un foncteur de  $\text{Alg}_K$  dans la catégorie  $\text{Mon}$  des monoïdes; de même  $\text{Aut}_E$  est un foncteur de  $\text{Alg}_K$  dans la catégorie  $\text{Gr}$  des groupes.

Soient maintenant  $C$  et  $G = \text{Spec}(C)$  comme ci-dessus. On a vu que  $G$  définit un foncteur (noté également  $G$ ) de  $\text{Alg}_K$  dans  $\text{Mon}$ ; ce foncteur est à valeurs dans  $\text{Gr}$  si  $G$  est un schéma en groupes.

**DÉFINITION 1.** On appelle *représentation linéaire de  $G$  dans  $E$*  tout morphisme  $\rho$  du foncteur  $G$  dans le foncteur  $\text{End}_E$ .