

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 42 (1996)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** MOYENNES SUR CERTAINS ENSEMBLES DE DIVISEURS D'UN ENTIER  
**Autor:** De Koninck, Jean-Marie / Grah, Jacques  
**Kapitel:** 1. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-87873>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## MOYENNES SUR CERTAINS ENSEMBLES DE DIVISEURS D'UN ENTIER

par Jean-Marie DE KONINCK et Jacques GRAH<sup>1)</sup>

ABSTRACT. Given an arithmetical function  $f$ , we examine the average value of  $f(d)$  as  $d$  runs through subsets of the divisors  $d$  of an integer  $n$ . In particular, we study the functions  $\bar{f}(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)$ ,  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ squarefree}}} f(d)$  and  $\tilde{f}(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)$ , where  $\tau(n)$  is the number of divisors of  $n$  and  $\omega(n)$  stands for the number of distinct prime factors of  $n$ , and show that their arithmetic properties resemble those of  $f$ .

### 1. INTRODUCTION

Soit  $\mathbf{F}$  l'ensemble des fonctions arithmétiques. On dit que  $f \in \mathbf{F}$  est *additive* si  $f(mn) = f(m) + f(n)$  lorsque  $(m, n) = 1$ . Si  $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_r^{\alpha_r}$  est la décomposition canonique de  $n$ , alors les fonctions  $\omega(n) = \sum_{p|n} 1 = r$ ,  $\Omega(n) = \sum_{i=1}^r \alpha_i$  et  $\log n$  sont additives. Lorsque l'égalité  $f(mn) = f(m) + f(n)$  est valable pour tous les entiers positifs  $m$  et  $n$ , on dit que  $f$  est *totalelement additive*. Si en plus d'être additive,  $f$  satisfait  $f(p^\alpha) = f(p)$  pour chaque nombre premier  $p$  et tout  $\alpha \in \mathbf{N}$ , on qualifie  $f$  de *fortement additive*.

Une fonction  $f \in \mathbf{F}$  est dite *multiplicative* si  $f(mn) = f(m)f(n)$  lorsque  $(m, n) = 1$ . C'est le cas des fonctions  $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ ,  $\tau(n) = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1)$ ,  $\phi(n) = \sum_{\substack{m \leq n \\ (m, n) = 1}} 1$ ,  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ ,  $1(n) = 1 \forall n \geq 1$ ,  $\delta(n) = q_1 q_2 \dots q_r$  (qu'on

<sup>1)</sup> Travail supporté en partie par une subvention du CRSNG et une subvention du programme FCAR. 1991 Mathematics Subject Classification: 11A25, 11N37.

appelle «noyau de  $n$ »), de la fonction de Moebius  $\mu(n)$  définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } p^2 \mid n \text{ pour un certain nombre premier } p \\ (-1)^r & \text{si } n = q_1 q_2 \dots q_r; q_i \text{ premiers distincts} \end{cases}$$

et enfin de la fonction  $E(n)$  qui vaut 1 si  $n = 1$ , et 0 autrement. Lorsque l'égalité  $f(mn) = f(m)f(n)$  est valable pour tous les entiers positifs  $m$  et  $n$ ,  $f$  est dite *totalelement multiplicative*. Une fonction multiplicative  $f$  telle que  $f(p^\alpha) = f(p)$  pour chaque nombre premier  $p$  et tout  $\alpha \in \mathbb{N}$  est dite *fortement multiplicative*. On désigne par  $\mathcal{M}$  (respectivement par  $\mathcal{C}\mathcal{M}$  et par  $\mathcal{F}\mathcal{M}$ ) l'ensemble des fonctions multiplicatives (respectivement l'ensemble des fonctions totalelement multiplicatives et l'ensemble des fonctions fortement multiplicatives). De même, on désigne par  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}\mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}\mathcal{A}$  les ensembles des fonctions additives, totalelement additives et fortement additives.

Très souvent, étant donné une fonction arithmétique  $f$ , on est appelé à étudier des expressions de la forme

$$(1.1) \quad \sum_{d \mid n} f(d), \quad \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ libre de carrés}}} f(d), \quad \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d) = 1}} f(d),$$

où, dans chaque cas, l'argument de  $f$  parcourt tous les diviseurs de l'entier positif  $n$  ou encore un sous-ensemble de ses diviseurs; la troisième somme de (1.1) parcourt ce qu'on appelle communément les diviseurs unitaires de l'entier  $n$ .

Notre étude portera d'abord sur les fonctions arithmétiques  $\bar{f}$ ,  $\hat{f}$  et  $\tilde{f}$ , associées à une fonction arithmétique  $f$  donnée, et définies respectivement par

$$(1.2) \quad \bar{f}(n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d), \quad \hat{f}(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ libre de carrés}}} f(d), \\ \tilde{f}(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d) = 1}} f(d).$$

En effet l'étude des sommes du type (1.1) et celle des sommes correspondantes (1.2) s'avèrent être deux problèmes analogues; toutefois les sommes (1.2) ont l'avantage d'avoir une interprétation «plus naturelle» en ce sens que chacune d'elles représente une moyenne de la fonction  $f$  lorsque son argument parcourt un sous-ensemble particulier de diviseurs de l'entier  $n$ . De plus, comme on le verra ci-dessous, les sommes du type (1.2) possèdent des propriétés arithmétiques qui rendent leur étude beaucoup plus facile que celles du type (1.1).

Les trois fonctions  $\bar{f}$ ,  $\hat{f}$  et  $\tilde{f}$  représentent donc la moyenne des valeurs de  $f$  prises respectivement sur les diviseurs de  $n$ , sur les diviseurs libres de carrés et sur les diviseurs unitaires de  $n$ . Par exemple si  $f(n) = 2^{\omega(n)}$  alors  $\bar{f}(n) = \tau(n^2)/\tau(n)$ . Si  $f(n) = \Lambda(n) = \log p$  si  $n = p^m$  (pour un certain  $p$  premier et  $m \geq 1$ ), 0 autrement, alors  $\tilde{f}(n) = \bar{\Lambda}(n) = \hat{\Lambda}(n) = \log(\delta(n))/2^{\omega(n)}$  et  $\bar{\Lambda}(n) = \log(n)/\tau(n)$ . Il est également facile de vérifier que  $\hat{\lambda}(n) = E(n)$ ,  $\bar{\omega}(n) = \sum_{p^\alpha \parallel n} \alpha/(1+\alpha) = \omega(n) - \sum_{p^\alpha \parallel n} 1/(1+\alpha)$ ,  $\hat{\omega}(n) = \tilde{\omega}(n) = \omega(n)/2 = \hat{\Omega}(n)$  et que  $\bar{1} = \hat{1} = \tilde{1} = 1$ . Plusieurs autres exemples seront exposés dans cet article.

Nous étudierons donc ici les propriétés arithmétiques des fonctions  $\bar{f}$ ,  $\hat{f}$  et  $\tilde{f}$ . C'est ainsi qu'à la section 2, on démontre que, vues comme des opérateurs sur l'ensemble  $\mathbf{F}$ , ces fonctions «héritent» du caractère additif de la fonction originale  $f$ , ou de son caractère multiplicatif, selon le cas.

Réciproquement, de (1.2), on montre que  $f$  hérite du caractère additif ou multiplicatif des fonctions  $\bar{f}$ , et  $\tilde{f}$ . En effet, en utilisant la notation habituelle  $f * g$  pour désigner le produit de Dirichlet des fonctions arithmétiques  $f$  et  $g$ , et  $*_u$  la restriction de  $*$  aux diviseurs unitaires, alors, si  $f \in \mathbf{F}$  telle que  $\bar{f} \in \mathcal{A}$ , des égalités  $f = \tau \bar{f} * \mu$  et  $\mu * \tau = 1$ , on déduit facilement que  $f \in \mathcal{A}$ . Pour  $\tilde{f} \in \mathcal{A}$  les identités  $f = 2^\omega \tilde{f} *_u (-1)^\omega$  et  $(-1)^\omega *_u 2^\omega = 1$  permettent d'établir l'additivité de  $f$ . Lorsque les fonctions  $\bar{f}$  et  $\tilde{f}$  appartiennent à  $\mathcal{M}$ , on obtient la multiplicativité de  $f$  directement à partir des formules d'inversion de Moebius sans faire appel aux identités  $\mu * \tau = 1$  et  $(-1)^\omega *_u 2^\omega = 1$ .

Nous traitons, à la section 3, des liens qui existent entre la valeur moyenne de  $f$  sur un intervalle donné  $[1, x]$  et celles des fonctions  $\bar{f}$ ,  $\hat{f}$  et  $\tilde{f}$ . Ainsi on établit que lorsque  $f \in \mathcal{FA}$  et satisfait certaines conditions de régularité, alors  $\bar{f}$  n'est pas nécessairement dans  $\mathcal{FA}$ , mais pourtant  $f$  possède une valeur moyenne si et seulement si  $\bar{f}$  en possède une. On complète cette section avec l'étude du comportement des itérations successives  $\bar{f}, \bar{\bar{f}}, \bar{\bar{\bar{f}}}, \dots$

La question naturelle de l'écart, pour un entier naturel  $n$ , entre  $f(n)$  et chacune des quantités  $\bar{f}(n)$ ,  $\hat{f}(n)$  et  $\tilde{f}(n)$ , est soulevée à la section 4. On démontre que ces écarts, interprétés comme des fonctions arithmétiques, préservent l'additivité, ce qui permet d'analyser plus facilement leur ordre de grandeur.

Enfin, à la section 5, étant donné une fonction arithmétique  $f$ , on considère des sous-ensembles de diviseurs d'un entier  $n$  qui ont la propriété d'être «multiplicatifs» et on introduit la notion de moyenne des valeurs de

la fonction  $f$  sur ces ensembles de diviseurs de  $n$ . Certains des résultats établis dans cette section donnent d'ailleurs lieu à plusieurs identités surprenantes.

Les auteurs remercient le rapporteur dont les nombreuses suggestions leur ont été utiles pour la version définitive de ce travail.

## 2. PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DE $\bar{f}$ , $\hat{f}$ ET $\tilde{f}$

On définit sur  $\mathbf{F}$  les opérateurs  $\bar{T}$ ,  $\hat{T}$  et  $\tilde{T}$  par  $\bar{T}(f) := \bar{f}$ ,  $\hat{T}(f) := \hat{f}$  et  $\tilde{T}(f) := \tilde{f}$ .

Du prochain résultat, il découle en particulier que toute fonction arithmétique est elle-même la «moyenne» d'une autre fonction arithmétique.

**THÉORÈME 2.1.** *L'opérateur  $\bar{T}$  établit une bijection de  $\mathbf{F}$  sur  $\mathbf{F}$ . Il en est de même pour l'opérateur  $\tilde{T}$ .*

*Démonstration.* Pour chaque  $f \in \mathbf{F}$ ,

$$\bar{T}(f) = \bar{f} = \frac{1}{\tau} (1 * f) \quad \text{si et seulement si } f = \mu * \tau \bar{f}$$

$$\text{, et } \tilde{T}(f) = \tilde{f} = \frac{1}{2^\omega} (1 *_u f) \quad \text{si et seulement si } f = (-1)^\omega *_u 2^\omega \tilde{f},$$

d'où le résultat.

**EXEMPLES.** Ainsi il est intéressant de se demander quelles sont les images par l'opérateur  $\bar{T}^{-1}$  ou par l'opérateur  $\tilde{T}^{-1}$  de certaines fonctions arithmétiques classiques, soit par exemple les fonctions  $\omega$ ,  $\Lambda$ ,  $\lambda(n)$  et  $E(n)$ . On vérifie successivement que

$$\omega(n) = \overline{(\omega + k)(n)}, \quad \text{où } k(n) = \sum_{p \parallel n} 1,$$

$$\Lambda(n) = \tilde{g}(n), \quad \text{où } g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^{\omega(n)} \sum_{p|n} \log \frac{1}{p^2} & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

$$\lambda(n) = \overline{\tilde{\lambda}(n) \tau(n^2)},$$

$$E(n) = \bar{\mu}(n) = \hat{\mu}(n).$$

L'opérateur  $\hat{T}$  n'est pas injectif. En effet, si on pose  $g_1(n) = \tau(n)/n$ ,  $g_2(n) = 2^{\omega(n)}/n$  et  $g_3(n) = 2^{\Omega(n)}/n$  alors

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(n) &= \hat{g}_2(n) = \hat{g}_3(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p|n} (1 + 2/p) \\ &= \frac{1}{\delta(n) 2^{\omega(n)}} \prod_{p|n} (1 + \sigma(p)) = \frac{\hat{\sigma}(n)}{\delta(n)}. \end{aligned}$$