L'Enseignement Mathématique, t. 43 (1997), p. 285–297

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)

par Ivan PAN [1])

RÉSUMÉ. Dans ce travail on étudie les transformations birationnelles de $\mathbf{P}^3$ de degré 3 dont l'inverse est aussi de degré 3 au moyen de la théorie de la liaison des courbes algébriques. On distingue trois types de transformations selon la nature du transformé strict d'un plan ou d'une droite générique.

INTRODUCTION

On désigne par k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et par $\mathbf{P}^3$ l'espace projectif sur k ; on notera $[x, y, z, w]$ le point de $\mathbf{P}^3$ de coordonnées homogènes x, y, z, w.

On rappelle qu'une application rationnelle

$$T \colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3 ,$$

peut être représentée comme

$$T(P) = [f_0(P), \dots, f_3(P)], \quad P \in \mathbf{P}^3 \setminus \{f_0 = \dots = f_3 = 0\} ,$$

où $f_0, \dots, f_3$ sont des polynômes homogènes de même degré $\deg(T)$ et sans diviseurs communs (voir [5, §7.2]); l'entier $\deg(T)$ est appelé *degré* de l'application. On dit que T est une *transformation de Cremona* si elle possède un inverse rationnel (*i.e.* si elle est birationnelle); dans ce cas $(\deg(T), \deg(T^{-1}))$ est appelé *bidegré* de T.

Par la suite on ne s'intéresse qu'au cas des transformations de Cremona de bidegré (3,3), dont l'un des exemples les plus célèbres est la transformation

$$T = [yzw, xzw, xyw, xyz] .$$

---

[1]) boursier du CNPq — Brésil.

Observer que dans l'ouvert $xyzw \neq 0$, on a

$$T = \left[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right],$$

d'où $T = T^{-1}$.

Ces transformations ont été l'objet d'études détaillées, voir [1], [3], [7], [8], [9], [16] et plus récemment [12]. Ici on utilise la théorie de la liaison des courbes algébriques ([11], [14]) pour classer ces transformations en trois types; on donne quelques exemples et à la fin on fait le lien avec les travaux classiques.

1. Le résultat principal

Soit $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ une transformation de Cremona. On choisit des ouverts non vides U et V de $\mathbf{P}^3$ tels que la restriction de T à U induise un isomorphisme

$$\tau : U \to V\,.$$

Soit $Z \subset \mathbf{P}^3$ une sous-variété linéaire. Si Z est *générique*, alors $Z \cap V \neq \varnothing$ et $\overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$ est une sous-variété qui ne dépend pas du choix de U et V : on l'appelle *transformée stricte* de Z par T et on la note $\widetilde{T^{-1}(Z)} := \overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$.

Par définition, le degré $\deg(T)$ de T est le degré du transformé strict d'un plan générique. Si L est une droite générique, on peut supposer que L ne rencontre pas le lieu d'indétermination de T^{-1} et dans ce cas, la restriction de T^{-1} à L est décrite par un système linéaire sans points base de degré égal au degré de T^{-1} ; il s'ensuit que $\deg(T^{-1})$ est égal au degré de $\widetilde{T^{-1}(L)}$ (voir aussi [7, chap.IX, § 3]).

On note $\mathbf{T}_{3,3}$ l'ensemble des transformations de Cremona de bidegré (3,3). La transformée stricte d'une droite générique par une telle transformation est donc une cubique rationnelle: c'est ou bien une cubique gauche, ou bien une cubique plane singulière.

Définitions 1.1. Soit $T \in \mathbf{T}_{3,3}$ et $L, H \subset \mathbf{P}^3$ une droite et un plan génériques. Alors

1. T est dite *déterminantielle* s'il existe une matrice à coefficients dans les formes linéaires sur k^4

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{pmatrix},$$

avec mineurs 3×3 (considérés avec leur signe) notés $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, telle que

$$T = [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4] ;$$

2. T est dite de *de Jonquières* si $\widetilde{T^{-1}(L)}$ est une courbe cubique plane;
3. T est dite *réglée* si $\widetilde{T^{-1}(H)}$ est une surface cubique réglée.

On note $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$ les ensembles des transformations de bidegré (3,3) qui sont déterminantielles, de de Jonquières et réglées respectivement.

Voici le résultat principal de ce travail, qui est démontré plus loin au §3.

THÉORÈME 1.2. $\mathbf{T}_{3,3} = \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$.

2. EXEMPLES

EXEMPLE 2.1. Comme on l'a vu, l'application rationnelle

$$T = [yzw, xzw, xyw, xyz]$$

est de Cremona de bidegré $(3, 3)$. On constate qu'elle est déterminantielle de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & 0 \\ -w & -w & -w \end{pmatrix} .$$

EXEMPLE 2.2. L'application rationnelle

$$T = [xz^2, yz^2, zw^2, w^3]$$

est une transformation de bidegré (3,3) avec inverse

$$T^{-1} = [xw^2, yw^2, z^3, z^2w] .$$

C'est une transformation réglée: en effet, le transformé strict d'un plan générique a l'équation

$$z^2(ax + by) + w^2(cz + dw) = 0 ,$$

qui est évidemment l'équation d'une surface réglée.

LEMME 2.3. *Notons $\mathcal{M}$ l'idéal engendré par x, y, z. Soient q, g des polynômes homogènes des degrés 2 et 3 respectivement tels que $q \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{M}^2$ et $qg \notin \mathcal{M}^5$. Supposons g irréductible. Alors l'application rationnelle $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ définie par*

$$T = [xq, yq, zq, g]$$

est une transformation de de Jonquières.

Preuve. En effet, prenons un plan générique d'équation

$$ax + by + cz + dw = 0\,;$$

son transformé strict est donc la surface cubique $S_{a,b,c,d}$ d'équation

$$q(ax + by + cz) + dg = 0\,,$$

qui est aussi irréductible. D'une part les conditions sur q et g impliquent que le point $P_0 = [0, 0, 0, 1]$ est un point double de $S_{a,b,c,d}$; d'autre part la restriction de T à $S_{a,b,c,d}$ est (la restriction d') une projection de centre P_0 sur un plan : si $s\colon \mathbf{P}^3 \to \mathbf{P}^3$ est l'automorphisme associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

la restriction de $s \circ T$ à $S_{a,b,c,d}$ est une projection de centre P_0 sur le plan $w = 0$. On en déduit que T est birationnelle du type de de Jonquières puisque la transformée stricte d'une droite générique est une section plane par P_0 d'une surface cubique avec un point double en P_0. □

On montre dans [13, cor. 3.3.7] que $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} = \varnothing$. Cependant $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \neq \varnothing$ et $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} \neq \varnothing$ comme il ressort des exemples qui suivent.

EXEMPLE 2.4. Considérons les applications rationnelles

$$T = [xy^2, yx^2, zx^2, wy^2] \text{ et } T' = [x^3, x^2y, x^2z, x^2z - y^2w]\,.$$

D'une part T est involutive, donc de Cremona de bidegré (3,3); elle est déterminantielle de matrice

$$\begin{pmatrix} x & w & 0 \\ -y & 0 & z \\ 0 & 0 & -y \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix}$$

et évidemment réglée. D'autre part, T' est une transformation de de Jonquières par le lemme 2.3 et aussi réglée.

EXEMPLE 2.5. Dans [13, chap. 4] on montre que la partie de dimension 1 de l'ensemble des points base d'une transformation réglée est de l'une des formes : une droite, deux droites concourantes, trois droites concourantes non coplanaires et trois droites non coplanaires dont l'une s'appuie sur les deux autres. Voici un exemple de chaque cas :

$$T_1 = [xy^2, y^3, zx^2, wx^2],$$
$$T_2 = [x^3, x^2y, zxy, wy^2],$$
$$T_3 = [x^2y, xy^2, z(y^2 - x^2), xyw],$$
$$T_4 = [xy^2, yx^2, zx^2, wy^2] ;$$

avec pour inverses respectives :

$$T_1^{-1} = [x^3, yx^2, zy^2, wy^2],$$
$$T_2^{-1} = [xy^2, y^3, zxy, wx^2],$$
$$T_3^{-1} = [x(y^2 - x^2), y(y^2 - x^2), zyx, w(y^2 - x^2)],$$
$$T_4^{-1} = T_4 .$$

3. PREUVE DU THÉORÈME

Deux lemmes sont nécessaires pour démontrer le résultat principal.

Rappelons pour commencer que sur une variété normale W, on dispose de la notion de système linéaire sans composante fixe associé à un diviseur de Weil : se donner un tel système linéaire Λ de dimension l revient à se donner une application rationnelle $\phi\colon W \dashrightarrow \mathbf{P}^l$ telle que le transformé strict d'un hyperplan générique de $\mathbf{P}^l$ est un élément générique de Λ ; de plus, l'ensemble des points base de Λ coïncide avec l'ensemble des points où ϕ n'est pas définie (voir [10]).

LEMME 3.1. *Soit $S \subset \mathbf{P}^3$ une surface cubique normale. Alors, tout système linéaire sur S dont l'élément générique est une cubique gauche a dimension au plus 2 ; en particulier ceux de dimension 2 sont complets.*

Preuve. Tout d'abord, on rappelle que normal implique régulier en codimension 1 (voir [6, chap. II, § 6]), donc l'ensemble des points singuliers de S a dimension zéro.

On suppose, par l'absurde, qu'il existe sur S un système linéaire Γ de dimension 3 constitué génériquement de cubiques gauches. Le sous-système Γ_{P_1,P_2} constitué de cubiques passant par deux points génériques P_1, P_2 de S est de dimension 1. Puisque S n'est singulière qu'en un nombre fini de points, un plan générique H passant par P_1 et P_2 est transverse à S en tout point, et par conséquent la section plane $C_H := H \cap S$ est une cubique lisse de genre 1. D'autre part, on a l'application rationnelle

$$\phi\colon \Gamma_{P_1,P_2} = \mathbf{P}^1 \dashrightarrow C_H$$

qui à $\gamma \in \Gamma_{P_1,P_2}$ générique associe le point P_γ de $\gamma \cap H$ distinct de P_1 et P_2. Puisque γ est gauche, P_γ n'appartient pas à la droite P_1P_2 et, quitte à changer H, on peut supposer que ϕ s'étend en un morphisme non constant de $\mathbf{P}^1$ dans C_H, ce qui est impossible. □

Pour le lemme suivant et la preuve du théorème on utilisera la théorie de la liaison des courbes développée par Peskine et Szpiro : voir [11] ou [14, chap. X, § 3].

Si Y est un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^3$, on note $\mathcal{I}_Y$ le plus grand idéal définissant Y (voir [14, chap. X, prop. 1.3]).

Une *cubique gauche généralisée* est un sous-schéma γ de $\mathbf{P}^3$ de dimension 1, tel que $\mathcal{I}_\gamma$ ait une résolution graduée libre minimale (on dira pour simplifier *résolution minimale*)

$$0 \longrightarrow A^2(-3) \xrightarrow{\varphi} A^3(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_\gamma \longrightarrow 0,$$

où $A = k[x,y,z,w]$; l'idéal $\mathcal{I}_\gamma$ est alors engendré par les trois mineurs maximaux de la matrice φ (voir [14, chap. X, lemme 2.7] ou [2, thm. 1.4.16]). On sait qu'une cubique gauche vérifie cette condition (voir [5, exemple 1.10]).

Finalement, si $T = [f_0, f_1, f_2, f_3]$ est une application rationnelle de $\mathbf{P}^3$ dans $\mathbf{P}^3$, on note $\mathcal{I}(T)$ l'idéal engendré par les f_i, $i = 0, \ldots, 3$.

LEMME 3.2. *Soit T une transformation de Cremona de bidegré $(3,3)$ qui n'est ni de de Jonquières ni réglée. Si $g, f_1 \in \mathcal{I}(T)$ sont des polynômes homogènes irréductibles génériques de degré trois, alors il existe une cubique gauche γ telle que*

$$\mathcal{I}(T)\mathcal{I}_\gamma \subset (g, f_1) \subset \mathcal{I}_\gamma .$$

Preuve. On note S la surface cubique irréductible d'équation $g = 0$; puisque T n'est pas réglée, S ne contient qu'un nombre fini de points singuliers (voir [15, chap. XV]) et est donc normale par le critère de Serre ([2, thm. 2.2.22]). Notons t_S l'application rationnelle de S dans un plan, induite par la restriction de T à S.

Sans perte de généralité, on peut supposer

$$T = [g, f_1, f_2, f_3]$$

avec

1. $t_S = [f_1, f_2, f_3] : S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ est birationnelle;
2. $g, f_1 \in \mathcal{I}_\gamma$, $f_2, f_3 \notin \mathcal{I}_\gamma$, où γ est la transformée stricte, par T, de la droite $x = y = 0$.

A l'application t_S correspond le système linéaire dont l'élément générique est la transformée stricte d'une droite générique. Puisque T n'est pas de de Jonquières, cet élément générique est une cubique gauche; en particulier $\gamma \in \Gamma_S$ est une cubique gauche.

Soient q_1, q_2, q_3 trois polynômes homogènes de degré deux qui engendrent $\mathcal{I}_\gamma$. Il suffit de démontrer

$$f_j q_i \in (g, f_1), \quad \forall i = 1, 2, 3 \ \forall j = 2, 3 .$$

On note Q_1, Q_2, Q_3 les sous-schémas de $\mathbf{P}^3$ définis par q_1, q_2, q_3.

Par liaison (voir [14, chap. X, thm. 3.8 et prop. 3.11])

$$S \cap Q_i = \gamma \cup \gamma_i \text{ (au sens schématique)}$$

où les γ_i sont des cubiques dont l'idéal a une résolution

$$0 \longrightarrow A^3(-3) \xrightarrow{\varphi_i'} A^3(-2) \oplus A(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_{\gamma_i} \longrightarrow 0 ,$$

qui se simplifie (voir [14, page 209]) en une résolution minimale

$$0 \longrightarrow A^2(-3) \xrightarrow{\varphi_i} A^3(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_{\gamma_i} \longrightarrow 0 ,$$

car la matrice de φ_i' possède une ligne constante avec l'un des coefficients non nul; les γ_i sont donc des cubiques gauches généralisées (cela suit aussi de [4, exemple 1]). Pour chaque $i = 1, 2, 3$, on choisit un ensemble de générateurs

$$\{q_i, q_{2i}, q_{3i}\}$$

de $\mathcal{I}_{\gamma_i}$, constitués par des polynômes homogènes de degré deux.

Les espaces vectoriels de bases q_i, q_{2i}, q_{3i} définissent sur S des systèmes linéaires Γ_i de dimension 2 constitués de cubiques; ils contiennent tous γ et Γ_S aussi: donc, par le lemme 3.1, ils coïncident.

Si $t_i\colon S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ désigne, pour $i = 1, 2, 3$, l'application rationnelle définie par $t_i = [q_i, q_{2i}, q_{3i}]$, on en déduit qu'il existe un automorphisme s_i de $\mathbf{P}^2$ tel que

$$t_S = s_i \circ t_i\,,$$

d'où (en tant qu'applications définies dans S):

$$[f_1, f_2, f_3] = [q'_i, q'_{2i}, q'_{3i}]$$

avec $s_i \circ [q_i, q_{2i}, q_{3i}] = [q'_i, q'_{2i}, q'_{3i}]$. Puisque $f_1|_\gamma = 0$ on a $q'_i|_{\gamma\cup\gamma_i} = 0$, d'où on peut supposer $q'_i = q_i$: observer que, par construction, le diviseur sur S associé à la fonction rationnelle q'_i/q_i est 0. On a donc

$$\left.\left(\frac{f_j}{f_1} - \frac{q'_{ji}}{q_i}\right)\right|_S = 0, \quad i = 1, 2, 3,\ j = 2, 3\,,$$

ou encore

$$f_j q_i - q'_{ji} f_1 \in (g), \quad i = 1, 2, 3,\ j = 2, 3\,,$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Preuve du théorème. Soit $T \in \mathbf{T}_{3,3} \backslash (\mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3})$. Par le lemme 3.2, il existe des polynômes homogènes irréductibles $g, f_1 \in \mathcal{I}(T)$ de degré trois et une cubique gauche γ tels que $\mathcal{I}(T)\mathcal{I}_\gamma \subset (g, f_1) \subset \mathcal{I}_\gamma$.

On sait que $\mathcal{I}_\gamma$ a une résolution minimale

(1) $$0 \to A^2(-3) \xrightarrow{\varphi} A^3(-2) \to \mathcal{I}_\gamma \to 0\,.$$

Posons

$$\mathcal{J} := \{\alpha \in A : \alpha\mathcal{I}_\gamma \subset (g, f_1)\}\,.$$

De la théorie de la liaison ([14, chap. X, thm. 3.8]) suit que $\mathcal{J}$ possède une résolution minimale de la forme

$$0 \to A^3(-4) \xrightarrow{\psi} A^4(-3) \to \mathcal{J} \to 0\,;$$

de plus l'idéal $\mathcal{J}$ est engendré par les mineurs maximaux de ψ ([14, chap. X, lemme 2.7] ou [2, thm. 1.4.16]), qui est une matrice 4×3 de formes linéaires.

Pour conclure on observe que $\mathcal{J} = \mathcal{I}(T)$: en effet, par construction $\mathcal{I}(T)$ est contenu dans $\mathcal{J}$ et ces deux idéaux sont engendrés par 4 polynômes homogènes de degré 3. $\square$

4. Un corollaire et plus d'exemples

COROLLAIRE 4.1. *Soit $T \in \mathbf{T}_{3,3}$. On suppose qu'il existe un plan $H \subset \mathbf{P}^3$ dont le transformé strict est lisse. Alors, T est déterminantielle.*

Preuve. On observe qu'on peut supposer le plan H générique. En particulier T n'est pas réglée et donc, par le théorème, il suffit de démontrer que T n'est pas de de Jonquières.

On note S le transformé strict de H et Γ le système linéaire sur S défini par les transformées strictes des droites contenues dans H. Par le théorème de Bertini ([6, chap. III, rem. 10.9.1]), un élément générique de Γ ne peut avoir de singularités que sur l'ensemble des points base de Γ. Puisque cet ensemble est fini, si T était de de Jonquières, il existerait $P \in S$ tel que l'élément générique de Γ serait une section plane de S singulière en P : puisque Γ a dimension deux, ceci contredit que S soit lisse. $\square$

REMARQUE. La preuve du corollaire montre que pour une transformation de de Jonquières, le transformé strict d'un plan générique possède un point double qui, par le théorème de Bertini, sera fixe si T n'est pas réglée.

Si $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ est une application rationnelle, le *schéma de base $B(T)$ de T* est, par définition, le sous-schéma de $\mathbf{P}^3$ défini par l'idéal $\mathcal{I}(T)$.

EXEMPLE 4.2. Si T est une transformation de Cremona telle que $B(T)$ est une courbe (réduite) irréductible et lisse, alors $T \in \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$: en utilisant [4, exemple 2], c'est un cas particulier de [12]; voir aussi [7, chap. XIV,§ 11].

EXEMPLE 4.3. Si $T' = [f_0,f_1,f_2,f_3] \in \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$, on a un complexe

$$0 \longrightarrow A^3(-4) \xrightarrow{M} A^4(-3) \xrightarrow{(f_0,f_1,f_2,f_3)} \mathcal{I}(T') \longrightarrow 0\,,$$

où M est une matrice dont les mineurs maximaux définissent T'. Par [14, chap. X, lemme 2.7] ou le théorème de Buchsbaum-Eisenbud [2, thm. 1.4.12], ce complexe est exact.

EXEMPLE 4.4. La transformation T de l'exemple 1.2 n'est pas déterminantielle. D'après l'exemple ci-dessus, il suffit de monrer que $\mathcal{I}(T)$ possède la résolution minimale

$$0 \longrightarrow A(-5) \xrightarrow{\varphi_0} A^3(-4) \oplus A(-5) \xrightarrow{\varphi_1} A^4(-3) \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0\,,$$

où

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & -a \\ z & 0 & -x & -b \\ -y & x & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = (xq, yq, zq, g)$$

et

$$g = ax + by + cz\,.$$

En effet, il est clair que $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_2)$; réciproquement, puisque $\mathrm{pgcd}(q, g) = 1$ et x, y, z est une suite A-régulière, on a

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\varphi_2) \iff (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)q + \alpha_4 g = 0$$

$$\iff \exists\, \beta_4 \in A : \begin{cases} \alpha_4 = \beta_4 q, \text{ et} \\ (\alpha_1 + \beta_4 a)x + (\alpha_2 + \beta_4 b)y \\ \qquad\qquad + (\alpha_3 + \beta_4 c)z = 0 \end{cases}$$

$$\implies \exists \beta := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} : \ \varphi_1(\beta) = \alpha\,,$$

d'où $\mathrm{Im}(\varphi_1) \supset \mathrm{Ker}(\varphi_2)$; en utilisant encore une fois que x, y, z est une suite A-régulière, on obtient $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Im}(\varphi_0)$; enfin φ_0 est banalement injective.

REMARQUE. Pour finir, on donne (sans démonstration) quelques précisions sur les sous-ensembles $\mathbf{T}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$ et $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$ (voir [13]) :

1. $\mathbf{T}_{3,3}$ *est un sous-ensemble constructible et connexe de dimension* 39, *dans la variété quasi-projective des applications rationnelles de degré* 3.

2. $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$ *et* $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$ *sont des sous-ensembles constructibles et irréductibles de dimensions* 39, 38 *et* 31 *respectivement, avec* $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} = \varnothing$.

3. *Soit* $T \in {\mathbf{T}_{3,3}}^*$, *où* $* \in \{D, J, R\}$; *notons* $p_{B(T)}$ *le polynôme de Hilbert de* $B(T)$. *Alors, on a des résolutions minimales de la forme :*

   (a) *pour* $* = D$,

   $$0 \longrightarrow A^3(-4) \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0\,;$$

   en particulier

   $$p_{B(T)}(t) = 6t - 2\,.$$

(b) *pour* $* = J$,

$$0 \longrightarrow A(-5) \longrightarrow A^3(-4) \oplus A(-5) \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0\,;$$

en particulier

$$p_{B(T)}(t) = 6t - 2\,.$$

(c) *pour* $* = R$ *et* T *générique,*

$$0 \longrightarrow A(-6) \longrightarrow (A(-5) \oplus A(-4))^2 \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0\,;$$

en particulier

$$p_{B(T)} = 5t + 1\,,$$

et donc $T \notin \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$.

5. Comparaison avec les résultats classiques

Soit $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ une transformation de Cremona; on note Λ_T le système linéaire correspondant: un élément générique de Λ_T est donc le transformé strict d'un plan générique. Si S, $S' \in \Lambda_T$ sont génériques, alors l'intersection schématique $S \cap S'$ est la réunion de la transformée stricte γ d'une droite générique et d'un 1-cycle fixe ω dont le support est contenu dans l'ensemble des points base de T; en particulier $\deg(\omega) = \deg(T)^2 - \deg(T^{-1})$. Dans le cas de bidegré (3,3) on a $\deg(\omega) = 6$, et on écrit $\omega_6 = \omega$.

Si O est un point singulier de S, pour tout $S \in \Lambda_T$, on dit:

(i) O est un *point double ordinaire* pour Λ_T si les cônes tangents en O des éléments génériques de Λ_T sont non dégénérés et sans génératrice commune;

(ii) O est un *point double de contact* pour Λ_T si les cônes tangents en O des éléments génériques de Λ_T sont non dégénérés et coïncident.

Dans [7, chap. XIV, page 295 et table VI], Hilda Hudson, qui ne considère apparemment que des situations génériques, affirme qu'il y a quatre types de transformations de bidegré (3,3). Plus précisément, elle distingue quatre cas suivant la nature du lieu des points singuliers $\Sigma(S)$ d'un élément générique $S \in \Lambda_T$ et celle de ω_6 (on indique entre parenthèses le type correspondant à notre définition 1.1):

(a) S est lisse (**D**);

(b) $\Sigma(S)$ est discret et

(b1) contient un point double O ordinaire pour Λ_T qui est un point double pour ω_6 (**J**), ou bien

(b2) contient un point double O de contact pour Λ_T qui est un point quadruple pour ω_6 (**J**);

(c) $\Sigma(S)$ est une droite (**R**).

Dans le cas (a), T est déterminantielle d'après le corollaire, et dans le cas (c) elle est évidemment réglée. Les deux cas (b) fournissent des transformations de de Jonquières: en effet, les hypothèses impliquent que O est un point multiple de $S \cap S'$ de multiplicité 4 pour (b1) ou 6 pour (b2), et donc que O est un point double de γ.

A partir du lemme 2.3 on construit facilement des transformations vérifiant les conditions (b): pour (b1) prendre q et g génériques, et pour (b2) choisir $q \in \mathcal{M}^2$ et g générique.

Dans [3] L. Cremona ne prétend pas à une classification mais se propose seulement de démontrer la simplicité et la fécondité de sa méthode de construction de transformations birationnelles (pour un exposé de cette méthode voir aussi [16, chap. VIII]); il étudie en détail cinq cas:

(1) S est lisse (**D**);

(2) S est réglée (**R**);

(3) S contient deux points doubles P_1, P_2 ordinaires pour Λ_T, et ω_6 est la réunion de la droite P_1P_2 et d'une quintique rationnelle avec deux points doubles en P_1 et P_2 (**D**) ou avec un point triple en P_1 et passant simplement par P_2 (**J**);

(4) S contient trois points doubles P_1, P_2, P_3 ordinaires pour Λ_T et ω_6 est la réunion des trois droites P_iP_j et d'une cubique gauche passant par les P_i (**D**);

(5) S contient un point double O de contact uniplanaire pour Λ_T (*i.e.* le cône tangent en O d'un élément générique de Λ_T est dégénéré en un plan double) et ω_6 a un point quadruple en O (**J**).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERZOLARI, L. Algebraische Transformationen und Korrespondenzen. *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, dritter Band: Geometrie, 2.2.B.* Teubner, 1932.

[2] BRUNS, W. and J. HERZOG. *Cohen-Macaulay rings.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1993.

[3] CREMONA, L. Sulle trasformazioni razionali nello spazio. *Lomb. Ist. Rend. (2) 4* (1871), 269–279, 315–324.

[4] ELLINGSRUD, G. Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans $\mathbf{P}^e$ à cône de Cohen-Macaulay. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, 8* (1975), 423–432.

[5] HARRIS, J. *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1992.

[6] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1977.

[7] HUDSON, H. P. *Cremona Transformation in Plane and Space.* Cambridge University Press, 1927.

[8] —— On cubic birational space transformations. *Amer. J. of Math. 34* (1912), 203–210.

[9] —— On the 3–3 birational transformation in three dimensions. *Proc. London Math. Soc. (2) 9* (1911), 55–66 and *10* (1912), 15–47.

[10] IITAKA, S. *An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties.* Springer Verlag, 1981.

[11] PESKINE, C. et L. SZPIRO. Liaison des variétés algébriques. *Invent. Math. 26* (1974), 271–302.

[12] KATZ, S. The cubo-cubic transformation of $\mathbf{P}^3$ is very special. *Math. Z. 195* (1987), 255–257.

[13] PAN, I. Sur les transformations de Cremona de bidegré (3,3). Thèse soutenue à l'Université de Genève, 1996.

[14] PERRIN, D. *Géométrie algébrique.* Savoirs Actuels. InterÉditions/CNRS Éditions, 1995.

[15] SALMON, G. *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions, Vol. II.* Chelsea Publishing Company, New York, 1965.

[16] SEMPLE, J. G. and L. ROTH. *Introduction to Algebraic Geometry.* Oxford at the Clarendon Press, 1949.

(Reçu le 10 avril 1997; version révisée reçue le 3 novembre 1997)

Ivan Pan

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Matemática
Av. Bento Gonçalves, 9500
91540-000 Porto Alegre/RS
Brésil
e-mail: pan@mat.ufrgs.br

vide-leer-empty