

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)
Autor: Pan, Ivan
Kapitel: Introduction
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63281>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)

par Ivan PAN¹⁾

RÉSUMÉ. Dans ce travail on étudie les transformations birationnelles de \mathbf{P}^3 de degré 3 dont l'inverse est aussi de degré 3 au moyen de la théorie de la liaison des courbes algébriques. On distingue trois types de transformations selon la nature du transformé strict d'un plan ou d'une droite générique.

INTRODUCTION

On désigne par k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et par \mathbf{P}^3 l'espace projectif sur k ; on notera $[x, y, z, w]$ le point de \mathbf{P}^3 de coordonnées homogènes x, y, z, w .

On rappelle qu'une application rationnelle

$$T: \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3,$$

peut être représentée comme

$$T(P) = [f_0(P), \dots, f_3(P)], \quad P \in \mathbf{P}^3 \setminus \{f_0 = \dots = f_3 = 0\},$$

où f_0, \dots, f_3 sont des polynômes homogènes de même degré $\deg(T)$ et sans diviseurs communs (voir [5, §7.2]); l'entier $\deg(T)$ est appelé *degré* de l'application. On dit que T est une *transformation de Cremona* si elle possède un inverse rationnel (*i.e.* si elle est birationnelle); dans ce cas $(\deg(T), \deg(T^{-1}))$ est appelé *bidegré* de T .

Par la suite on ne s'intéresse qu'au cas des transformations de Cremona de bidegré (3,3), dont l'un des exemples les plus célèbres est la transformation

$$T = [yzw, xzw, xyw, xyz].$$

¹⁾ boursier du CNPq — Brésil.

Observer que dans l'ouvert $xyzw \neq 0$, on a

$$T = \left[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{w} \right],$$

d'où $T = T^{-1}$.

Ces transformations ont été l'objet d'études détaillées, voir [1], [3], [7], [8], [9], [16] et plus récemment [12]. Ici on utilise la théorie de la liaison des courbes algébriques ([11], [14]) pour classer ces transformations en trois types; on donne quelques exemples et à la fin on fait le lien avec les travaux classiques.

1. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

Soit $T: \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ une transformation de Cremona. On choisit des ouverts non vides U et V de \mathbf{P}^3 tels que la restriction de T à U induise un isomorphisme

$$\tau: U \rightarrow V.$$

Soit $Z \subset \mathbf{P}^3$ une sous-variété linéaire. Si Z est *générique*, alors $Z \cap V \neq \emptyset$ et $\overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$ est une sous-variété qui ne dépend pas du choix de U et V : on l'appelle *transformée stricte* de Z par T et on la note $\widetilde{T^{-1}(Z)} := \overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$.

Par définition, le degré $\deg(T)$ de T est le degré du transformé strict d'un plan générique. Si L est une droite générique, on peut supposer que L ne rencontre pas le lieu d'indétermination de T^{-1} et dans ce cas, la restriction de T^{-1} à L est décrite par un système linéaire sans points base de degré égal au degré de T^{-1} ; il s'ensuit que $\deg(T^{-1})$ est égal au degré de $\widetilde{T^{-1}(L)}$ (voir aussi [7, chap.IX, §3]).

On note $\mathbf{T}_{3,3}$ l'ensemble des transformations de Cremona de bidegré (3,3). La transformée stricte d'une droite générique par une telle transformation est donc une cubique rationnelle: c'est ou bien une cubique gauche, ou bien une cubique plane singulière.

DÉFINITIONS 1.1. Soit $T \in \mathbf{T}_{3,3}$ et $L, H \subset \mathbf{P}^3$ une droite et un plan génériques. Alors

1. T est dite *déterminantielle* s'il existe une matrice à coefficients dans les formes linéaires sur k^4

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{pmatrix},$$