

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 43 (1997)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)  
**Autor:** Pan, Ivan  
**Kapitel:** 3. Preuve du théorème  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63281>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

et évidemment réglée. D'autre part,  $T'$  est une transformation de de Jonquières par le lemme 2.3 et aussi réglée.

EXEMPLE 2.5. Dans [13, chap. 4] on montre que la partie de dimension 1 de l'ensemble des points base d'une transformation réglée est de l'une des formes : une droite, deux droites concourantes, trois droites concourantes non coplanaires et trois droites non coplanaires dont l'une s'appuie sur les deux autres. Voici un exemple de chaque cas :

$$T_1 = [xy^2, y^3, zx^2, wx^2],$$

$$T_2 = [x^3, x^2y, zxy, wy^2],$$

$$T_3 = [x^2y, xy^2, z(y^2 - x^2), xyw],$$

$$T_4 = [xy^2, yx^2, zx^2, wy^2];$$

avec pour inverses respectives :

$$T_1^{-1} = [x^3, yx^2, zy^2, wy^2],$$

$$T_2^{-1} = [xy^2, y^3, zxy, wx^2],$$

$$T_3^{-1} = [x(y^2 - x^2), y(y^2 - x^2), zyx, w(y^2 - x^2)],$$

$$T_4^{-1} = T_4.$$

### 3. PREUVE DU THÉORÈME

Deux lemmes sont nécessaires pour démontrer le résultat principal.

Rappelons pour commencer que sur une variété normale  $W$ , on dispose de la notion de système linéaire sans composante fixe associé à un diviseur de Weil : se donner un tel système linéaire  $\Lambda$  de dimension  $l$  revient à se donner une application rationnelle  $\phi : W \dashrightarrow \mathbf{P}^l$  telle que le transformé strict d'un hyperplan générique de  $\mathbf{P}^l$  est un élément générique de  $\Lambda$  ; de plus, l'ensemble des points base de  $\Lambda$  coïncide avec l'ensemble des points où  $\phi$  n'est pas définie (voir [10]).

LEMME 3.1. *Soit  $S \subset \mathbf{P}^3$  une surface cubique normale. Alors, tout système linéaire sur  $S$  dont l'élément générique est une cubique gauche a dimension au plus 2; en particulier ceux de dimension 2 sont complets.*

*Preuve.* Tout d'abord, on rappelle que normal implique régulier en codimension 1 (voir [6, chap. II, §6]), donc l'ensemble des points singuliers de  $S$  a dimension zéro.

On suppose, par l'absurde, qu'il existe sur  $S$  un système linéaire  $\Gamma$  de dimension 3 constitué génériquement de cubiques gauches. Le sous-système  $\Gamma_{P_1, P_2}$  constitué de cubiques passant par deux points génériques  $P_1, P_2$  de  $S$  est de dimension 1. Puisque  $S$  n'est singulière qu'en un nombre fini de points, un plan générique  $H$  passant par  $P_1$  et  $P_2$  est transverse à  $S$  en tout point, et par conséquent la section plane  $C_H := H \cap S$  est une cubique lisse de genre 1. D'autre part, on a l'application rationnelle

$$\phi: \Gamma_{P_1, P_2} = \mathbf{P}^1 \dashrightarrow C_H$$

qui à  $\gamma \in \Gamma_{P_1, P_2}$  générique associe le point  $P_\gamma$  de  $\gamma \cap H$  distinct de  $P_1$  et  $P_2$ . Puisque  $\gamma$  est gauche,  $P_\gamma$  n'appartient pas à la droite  $P_1P_2$  et, quitte à changer  $H$ , on peut supposer que  $\phi$  s'étend en un morphisme non constant de  $\mathbf{P}^1$  dans  $C_H$ , ce qui est impossible.  $\square$

Pour le lemme suivant et la preuve du théorème on utilisera la théorie de la liaison des courbes développée par Peskine et Szpiro: voir [11] ou [14, chap. X, §3].

Si  $Y$  est un sous-schéma fermé de  $\mathbf{P}^3$ , on note  $\mathcal{I}_Y$  le plus grand idéal définissant  $Y$  (voir [14, chap. X, prop. 1.3]).

Une *cubique gauche généralisée* est un sous-schéma  $\gamma$  de  $\mathbf{P}^3$  de dimension 1, tel que  $\mathcal{I}_\gamma$  ait une résolution graduée libre minimale (on dira pour simplifier *résolution minimale*)

$$0 \longrightarrow A^2(-3) \xrightarrow{\varphi} A^3(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_\gamma \longrightarrow 0,$$

où  $A = k[x, y, z, w]$ ; l'idéal  $\mathcal{I}_\gamma$  est alors engendré par les trois mineurs maximaux de la matrice  $\varphi$  (voir [14, chap. X, lemme 2.7] ou [2, thm. 1.4.16]). On sait qu'une cubique gauche vérifie cette condition (voir [5, exemple 1.10]).

Finalement, si  $T = [f_0, f_1, f_2, f_3]$  est une application rationnelle de  $\mathbf{P}^3$  dans  $\mathbf{P}^3$ , on note  $\mathcal{I}(T)$  l'idéal engendré par les  $f_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ .

LEMME 3.2. Soit  $T$  une transformation de Cremona de bidegré (3,3) qui n'est ni de de Jonquières ni réglée. Si  $g, f_1 \in \mathcal{I}(T)$  sont des polynômes homogènes irréductibles génériques de degré trois, alors il existe une cubique gauche  $\gamma$  telle que

$$\mathcal{I}(T)\mathcal{I}_\gamma \subset (g, f_1) \subset \mathcal{I}_\gamma.$$

*Preuve.* On note  $S$  la surface cubique irréductible d'équation  $g = 0$ ; puisque  $T$  n'est pas réglée,  $S$  ne contient qu'un nombre fini de points singuliers (voir [15, chap. XV]) et est donc normale par le critère de Serre ([2, thm. 2.2.22]). Notons  $t_S$  l'application rationnelle de  $S$  dans un plan, induite par la restriction de  $T$  à  $S$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer

$$T = [g, f_1, f_2, f_3]$$

avec

1.  $t_S = [f_1, f_2, f_3]: S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$  est birationnelle;
2.  $g, f_1 \in \mathcal{I}_\gamma, f_2, f_3 \notin \mathcal{I}_\gamma$ , où  $\gamma$  est la transformée stricte, par  $T$ , de la droite  $x = y = 0$ .

A l'application  $t_S$  correspond le système linéaire dont l'élément générique est la transformée stricte d'une droite générique. Puisque  $T$  n'est pas de de Jonquières, cet élément générique est une cubique gauche; en particulier  $\gamma \in \Gamma_S$  est une cubique gauche.

Soient  $q_1, q_2, q_3$  trois polynômes homogènes de degré deux qui engendrent  $\mathcal{I}_\gamma$ . Il suffit de démontrer

$$f_j q_i \in (g, f_1), \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad \forall j = 2, 3.$$

On note  $Q_1, Q_2, Q_3$  les sous-schémas de  $\mathbf{P}^3$  définis par  $q_1, q_2, q_3$ .

Par liaison (voir [14, chap. X, thm. 3.8 et prop. 3.11])

$$S \cap Q_i = \gamma \cup \gamma_i \text{ (au sens schématique)}$$

où les  $\gamma_i$  sont des cubiques dont l'idéal a une résolution

$$0 \longrightarrow A^3(-3) \xrightarrow{\varphi'_i} A^3(-2) \oplus A(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_{\gamma_i} \longrightarrow 0,$$

qui se simplifie (voir [14, page 209]) en une résolution minimale

$$0 \longrightarrow A^2(-3) \xrightarrow{\varphi_i} A^3(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_{\gamma_i} \longrightarrow 0,$$

car la matrice de  $\varphi'_i$  possède une ligne constante avec l'un des coefficients non nul; les  $\gamma_i$  sont donc des cubiques gauches généralisées (cela suit aussi de [4, exemple 1]). Pour chaque  $i = 1, 2, 3$ , on choisit un ensemble de générateurs

$$\{q_i, q_{2i}, q_{3i}\}$$

de  $\mathcal{I}_{\gamma_i}$ , constitués par des polynômes homogènes de degré deux.

Les espaces vectoriels de bases  $q_i, q_{2i}, q_{3i}$  définissent sur  $S$  des systèmes linéaires  $\Gamma_i$  de dimension 2 constitués de cubiques; ils contiennent tous  $\gamma$  et  $\Gamma_S$  aussi: donc, par le lemme 3.1, ils coïncident.

Si  $t_i: S \dashrightarrow \mathbf{P}^2$  désigne, pour  $i = 1, 2, 3$ , l'application rationnelle définie par  $t_i = [q_i, q_{2i}, q_{3i}]$ , on en déduit qu'il existe un automorphisme  $s_i$  de  $\mathbf{P}^2$  tel que

$$t_S = s_i \circ t_i,$$

d'où (en tant qu'applications définies dans  $S$ ):

$$[f_1, f_2, f_3] = [q'_i, q'_{2i}, q'_{3i}]$$

avec  $s_i \circ [q_i, q_{2i}, q_{3i}] = [q'_i, q'_{2i}, q'_{3i}]$ . Puisque  $f_1|_{\gamma} = 0$  on a  $q'_i|_{\gamma \cup \gamma_i} = 0$ , d'où on peut supposer  $q'_i = q_i$ : observer que, par construction, le diviseur sur  $S$  associé à la fonction rationnelle  $q'_i/q_i$  est 0. On a donc

$$\left( \frac{f_j}{f_1} - \frac{q'_{ji}}{q_i} \right) \Big|_S = 0, \quad i = 1, 2, 3, j = 2, 3,$$

ou encore

$$f_j q_i - q'_{ji} f_1 \in (g), \quad i = 1, 2, 3, j = 2, 3,$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

*Preuve du théorème.* Soit  $T \in \mathbf{T}_{3,3} \setminus (\mathbf{T}_{3,3}^J \cup \mathbf{T}_{3,3}^R)$ . Par le lemme 3.2, il existe des polynômes homogènes irréductibles  $g, f_1 \in \mathcal{I}(T)$  de degré trois et une cubique gauche  $\gamma$  tels que  $\mathcal{I}(T)\mathcal{I}_{\gamma} \subset (g, f_1) \subset \mathcal{I}_{\gamma}$ .

On sait que  $\mathcal{I}_{\gamma}$  a une résolution minimale

$$(1) \quad 0 \rightarrow A^2(-3) \xrightarrow{\varphi} A^3(-2) \rightarrow \mathcal{I}_{\gamma} \rightarrow 0.$$

Posons

$$\mathcal{J} := \{\alpha \in A : \alpha \mathcal{I}_{\gamma} \subset (g, f_1)\}.$$

De la théorie de la liaison ([14, chap. X, thm. 3.8]) suit que  $\mathcal{J}$  possède une résolution minimale de la forme

$$0 \rightarrow A^3(-4) \xrightarrow{\psi} A^4(-3) \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow 0;$$

de plus l'idéal  $\mathcal{J}$  est engendré par les mineurs maximaux de  $\psi$  ([14, chap. X, lemme 2.7] ou [2, thm. 1.4.16]), qui est une matrice  $4 \times 3$  de formes linéaires.

Pour conclure on observe que  $\mathcal{J} = \mathcal{I}(T)$ : en effet, par construction  $\mathcal{I}(T)$  est contenu dans  $\mathcal{J}$  et ces deux idéaux sont engendrés par 4 polynômes homogènes de degré 3.  $\square$