

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)
Autor: Pan, Ivan
Kapitel: 4. Un corollaire et plus d'exemples
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63281>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

4. UN COROLLAIRE ET PLUS D'EXEMPLES

COROLLAIRE 4.1. *Soit $T \in \mathbf{T}_{3,3}$. On suppose qu'il existe un plan $H \subset \mathbf{P}^3$ dont le transformé strict est lisse. Alors, T est déterminantielle.*

Preuve. On observe qu'on peut supposer le plan H générique. En particulier T n'est pas réglée et donc, par le théorème, il suffit de démontrer que T n'est pas de de Jonquières.

On note S le transformé strict de H et Γ le système linéaire sur S défini par les transformées strictes des droites contenues dans H . Par le théorème de Bertini ([6, chap. III, rem. 10.9.1]), un élément générique de Γ ne peut avoir de singularités que sur l'ensemble des points base de Γ . Puisque cet ensemble est fini, si T était de de Jonquières, il existerait $P \in S$ tel que l'élément générique de Γ serait une section plane de S singulière en P : puisque Γ a dimension deux, ceci contredit que S soit lisse. \square

REMARQUE. La preuve du corollaire montre que pour une transformation de de Jonquières, le transformé strict d'un plan générique possède un point double qui, par le théorème de Bertini, sera fixe si T n'est pas réglée.

Si $T: \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ est une application rationnelle, le schéma de base $B(T)$ de T est, par définition, le sous-schéma de \mathbf{P}^3 défini par l'idéal $\mathcal{I}(T)$.

EXEMPLE 4.2. Si T est une transformation de Cremona telle que $B(T)$ est une courbe (réduite) irréductible et lisse, alors $T \in \mathbf{T}_{3,3}^D$: en utilisant [4, exemple 2], c'est un cas particulier de [12]; voir aussi [7, chap. XIV, § 11].

EXEMPLE 4.3. Si $T' = [f_0, f_1, f_2, f_3] \in \mathbf{T}_{3,3}^D$, on a un complexe

$$0 \longrightarrow A^3(-4) \xrightarrow{M} A^4(-3) \xrightarrow{(f_0, f_1, f_2, f_3)} \mathcal{I}(T') \longrightarrow 0,$$

où M est une matrice dont les mineurs maximaux définissent T' . Par [14, chap. X, lemme 2.7] ou le théorème de Buchsbaum-Eisenbud [2, thm. 1.4.12], ce complexe est exact.

EXEMPLE 4.4. La transformation T de l'exemple 1.2 n'est pas déterminantielle. D'après l'exemple ci-dessus, il suffit de montrer que $\mathcal{I}(T)$ possède la résolution minimale

$$0 \longrightarrow A(-5) \xrightarrow{\varphi_0} A^3(-4) \oplus A(-5) \xrightarrow{\varphi_1} A^4(-3) \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0,$$

où

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & -a \\ z & 0 & -x & -b \\ -y & x & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = (xq, yq, zq, g)$$

et

$$g = ax + by + cz.$$

En effet, il est clair que $\text{Im}(\varphi_1) \subset \text{Ker}(\varphi_2)$; réciproquement, puisque $\text{pgcd}(q, g) = 1$ et x, y, z est une suite A -régulière, on a

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\varphi_2) \iff (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)q + \alpha_4 g = 0$$

$$\iff \exists \beta_4 \in A : \begin{cases} \alpha_4 = \beta_4 q, \text{ et} \\ (\alpha_1 + \beta_4 a)x + (\alpha_2 + \beta_4 b)y \\ \quad + (\alpha_3 + \beta_4 c)z = 0 \end{cases}$$

$$\implies \exists \beta := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} : \varphi_1(\beta) = \alpha,$$

d'où $\text{Im}(\varphi_1) \supset \text{Ker}(\varphi_2)$; en utilisant encore une fois que x, y, z est une suite A -régulière, on obtient $\text{Ker}(\varphi_1) = \text{Im}(\varphi_0)$; enfin φ_0 est banalement injective.

REMARQUE. Pour finir, on donne (sans démonstration) quelques précisions sur les sous-ensembles $\mathbf{T}_{3,3}$, $\mathbf{T}_{3,3}^D$, $\mathbf{T}_{3,3}^J$ et $\mathbf{T}_{3,3}^R$ (voir [13]):

1. $\mathbf{T}_{3,3}$ est un sous-ensemble constructible et connexe de dimension 39, dans la variété quasi-projective des applications rationnelles de degré 3.
2. $\mathbf{T}_{3,3}^D$, $\mathbf{T}_{3,3}^J$ et $\mathbf{T}_{3,3}^R$ sont des sous-ensembles constructibles et irréductibles de dimensions 39, 38 et 31 respectivement, avec $\mathbf{T}_{3,3}^D \cap \mathbf{T}_{3,3}^J = \emptyset$.
3. Soit $T \in \mathbf{T}_{3,3}^*$, où $* \in \{D, J, R\}$; notons $p_{B(T)}$ le polynôme de Hilbert de $B(T)$. Alors, on a des résolutions minimales de la forme :
 - (a) pour $* = D$,

$$0 \longrightarrow A^3(-4) \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0;$$

en particulier

$$p_{B(T)}(t) = 6t - 2.$$

(b) pour $* = J$,

$$0 \longrightarrow A(-5) \longrightarrow A^3(-4) \oplus A(-5) \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0;$$

en particulier

$$p_{B(T)}(t) = 6t - 2.$$

(c) pour $* = R$ et T générique,

$$0 \longrightarrow A(-6) \longrightarrow (A(-5) \oplus A(-4))^2 \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0;$$

en particulier

$$p_{B(T)} = 5t + 1,$$

et donc $T \notin \mathbf{T}_{3,3}^D \cup \mathbf{T}_{3,3}^J$.

5. COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS CLASSIQUES

Soit $T: \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ une transformation de Cremona; on note Λ_T le système linéaire correspondant: un élément générique de Λ_T est donc le transformé strict d'un plan générique. Si $S, S' \in \Lambda_T$ sont génériques, alors l'intersection schématique $S \cap S'$ est la réunion de la transformée stricte γ d'une droite générique et d'un 1-cycle fixe ω dont le support est contenu dans l'ensemble des points base de T ; en particulier $\deg(\omega) = \deg(T)^2 - \deg(T^{-1})$. Dans le cas de bidegré (3,3) on a $\deg(\omega) = 6$, et on écrit $\omega_6 = \omega$.

Si O est un point singulier de S , pour tout $S \in \Lambda_T$, on dit:

- (i) O est un *point double ordinaire* pour Λ_T si les cônes tangents en O des éléments génériques de Λ_T sont non dégénérés et sans génératrice commune;
- (ii) O est un *point double de contact* pour Λ_T si les cônes tangents en O des éléments génériques de Λ_T sont non dégénérés et coïncident.

Dans [7, chap. XIV, page 295 et table VI], Hilda Hudson, qui ne considère apparemment que des situations génériques, affirme qu'il y a quatre types de transformations de bidegré (3,3). Plus précisément, elle distingue quatre cas suivant la nature du lieu des points singuliers $\Sigma(S)$ d'un élément générique $S \in \Lambda_T$ et celle de ω_6 (on indique entre parenthèses le type correspondant à notre définition 1.1):