Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUISINGULARITÉ DANS LES PINCEAUX DE GERMES DE COURBES PLANES ET C^0-SUFFISANCE

Autor: Trang, LÊ Dung / WEBER, Claude

Kapitel: §8. Un petit historique de la C^0-suffisance

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63285

Par conséquent, le degré $\hat{h}|_{D'} \to \mathbf{P}^1$ est au moins égal à 2. La restriction de $\hat{h}$ à D' aura au moins une valeur critique distincte de ∞ (grâce au théorème de Hurwitz). Par conséquent $S_{D'}$ contient au moins une valeur distincte de ∞ et l'on conclut comme précédemment. Fin de la preuve du théorème 7.3.

REMARQUES FINALES.

1. La preuve du théorème 7.3 montre clairement que si f n'est pas à singularité isolée à l'origine, aucun jet $j^{(r)}(f)$ n'est suffisant (pour r fini). En effet, choisissons un point de contact de la transformée stricte de $f = 0$ avec $\pi^{-1}(0)$ où cette transformée stricte n'est pas réduite.

Appliquons le lemme 6.1 pour $g = l(x,y)^N$ avec N grand et $h = \frac{f}{g}$. On voit que l'on a $u > 1$ car f n'est pas réduite. La remarque qui suit le lemme 6.1 indique que la composante dicritique créée par l'utilisation du lemme 6.1 n'est pas bonne. Il est facile de déterminer grâce au lemme 6.1 quel est le membre générique du pinceau ainsi créé (il dépend de l'entier N). Bien sûr, ce membre générique est à singularité isolée. Ceci donne un autre point de vue sur les résultats de H. Maugendre dans sa thèse. (Voir [Mau].)

2. Soit $l(x,y) = 0$ l'équation d'une droite transverse à $f(x,y) = 0$. La preuve du théorème 7.3 montre que le jet $j^{(r)}(f)$ est topologiquement suffisant si et seulement si $f - \lambda l^{r+1}$ est topologiquement équivalent à f pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Comparer avec B. Teissier dans [Tei2] p. 280.

§8. UN PETIT HISTORIQUE DE LA C^0-SUFFISANCE

Le concept de C^0-suffisance apparaît dans l'article de R. Thom au colloque de Bombay. (Voir [Thom].) Le rôle de l'inégalité de Lojasiewicz y est mis en évidence.

Au cours des années 1970-80, plusieurs auteurs (voir, entre autres, [Kuo2], [Bo-Lo], [Ch-Lu]) ont établi que Suff(f) est donné par l'inégalité de Lojasiewicz de la façon suivante. On considère les exposants $\theta > 0$ tels qu'il existe un voisinage U de l'origine et une constante $C > 0$ tels que l'on ait: $|\text{grad } f(z)| \geq C|z|^\theta$ pour tout $z \in U$. La borne inférieure des θ ayant cette propriété est *l'exposant de Lojasiewicz* Loja(f). Le résultat obtenu par plusieurs auteurs est que Suff$(f) = \left[\text{Loja}(f)\right] + 1$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Dans [Kuo-Lu] T.C. Kuo et Y.C. Lu ont donné une façon explicite de calculer l'exposant de Lojasiewicz pour les germes de courbes planes, en utilisant les développements de Puiseux des branches de $f = 0$.

En 1975, B. Teissier a démontré (pour n quelconque) que Loja(f) est égal au maximum des invariants polaires $\frac{e_q}{m_q}$ selon sa définition des invariants polaires. Voir [Tei1] p. 626. A la même époque, il démontre directement que $\mathrm{Suff}(f) = \max\left\{\left[\frac{e_q}{m_q}\right]\right\}$. Voir [Tei2] p. 280. Dans [Mer] M. Merle a explicité une façon de calculer les invariants polaires pour les branches de courbes planes.

Dans [L-M-W1] et [L-M-W2] nous avons donné avec F. Michel une interprétation topologique des invariants polaires des courbes planes et une façon simple de les calculer à l'aide des quotients d'Hironaka (appelés alors coefficients d'insertion) de la résolution minimale de f. Dans le présent travail, nous avons donné une démonstration directe (pour les courbes planes) du fait que Suff(f) se calcule à partir des quotients d'Hironaka.

D'autres points de vue sur Suff(f) pour les courbes planes sont exprimés dans [B.Li] et [Cos].

Finalement, au chapitre 7 de son livre [Cas], E. Casas-Alvero détermine également le degré de C^0-suffisance d'un germe de courbe plane par le biais des pinceaux. Son étude est basée sur la théorie des points infiniment voisins à la Enriques, développée dans les premiers chapitres de son livre.

Nous terminons ce paragraphe en comparant les valeurs obtenues pour Suff(f) par quelques auteurs, pour aider le lecteur à s'y retrouver. Les invariants polaires $\frac{e_q}{m_q}$ de B. Teissier sont définis par l'égalité

$$\frac{e_q}{m_q} + 1 = \frac{I(\Gamma_q, f = 0)}{\mathrm{mult}(\Gamma_q)}$$

où $\{\Gamma_q\}_q$ désigne l'ensemble des branches d'une polaire de f. (Voir [Tei2] p.270.)

Dans nos deux articles cités avec F. Michel, nous avons démontré que l'ensemble $\{I(\Gamma_q, f = 0)/\mathrm{mult}(\Gamma_q)\}_q$ est égal à l'ensemble $\{q_D\}$ où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de la résolution minimale de f. Compte tenu de la différence d'une unité entre les $\frac{e_q}{m_q}$ et les q_D notre théorème 7.3 est bien numériquement équivalent au théorème de B. Teissier, à la p. 280 de [Tei2].

On observera que le même décalage d'une unité se retrouve dans la formule $\mathrm{Suff}(f) = \left[\mathrm{Loja}(f)\right] + 1$ citée au début de ce paragraphe. Compte tenu du cor. 2 p. 270 de [Tei2] qui affirme que $\mathrm{Loja}(f) = \max\left\{\frac{e_q}{m_q}\right\}$ (voir aussi [Tei1] p. 626) tous les énoncés sont bien numériquement équivalents.