Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN
Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.
Kapitel: 2. DÉVELOPPEMENTS D'EULER-MACLAURIN FORMELS
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

qu'une série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ admet *une et une seule* somme de Ramanujan, celle-ci étant définie comme la valeur en 1 de l'unique solution de l'équation aux différences $R(x)-R(x+1) = a(x)$ vérifiant la condition : $\int_1^2 R(t)\,dt = 0$ (cf. § 3). Ceci permet de développer dans ce cadre les propriétés de cette sommation (cf. § 4) et d'établir un lien avec l'interpolation de Newton (cf. § 6).

Il convient de noter que le procédé de Ramanujan *n'est pas un procédé de sommation au sens usuel* : si la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ converge au sens habituel, sa somme de Cauchy (c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles de la série) ne coïncide pas en général avec la somme de la série au sens de Ramanujan (cf. § 3.1, exemple 2). Les liens existant entre les deux procédés de sommation sont explicités au paragraphe 3.2.

2. DÉVELOPPEMENTS D'EULER-MACLAURIN FORMELS

Soit a une fonction analytique dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$. Dans cette partie, on considère la série

$$\sum_{n\geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \dots$$

comme une expression formelle. Soit $R(x)$ le « reste de la série à l'ordre x » défini formellement par :

$$R(x) = \sum_{n\geq 0} a(n+x) = a(x) + a(x+1) + \dots .$$

Par définition de R, on a :

$$\sum_{n\geq 1} a(n) = R(1)\,,$$

et la « fonction » R est solution formelle de l'équation aux différences :

$$R(x) - R(x+1) = a(x)\,.$$

Soit E l'opérateur de translation défini par $Ef(x) = f(x+1)$, que l'on peut encore écrire grâce à la formule de Taylor : $E = e^{\partial}$, $\partial := \partial_x$ désignant l'opérateur de dérivation ordinaire. Si I désigne l'opérateur d'identité, l'équation aux différences précédente peut s'écrire à l'aide des opérateurs E et I sous la forme :

$$(I - E)\,R = a\,.$$

En inversant, on obtient :

$$R = \frac{I}{I - E}\, a\,,$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$R = -\frac{\partial}{e^{\partial} - I}\, \partial^{-1} a\,.$$

Le développement de Taylor formel:

$$\frac{\partial}{e^{\partial} - I} = I + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!}\, \partial^k$$

permet alors d'obtenir ce que nous appellerons le développement formel de R :

$$R(x) = -\partial^{-1} a(x) - \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!}\, \partial^{k-1} a(x)\,.$$

Par définition de R, on a:

$$\sum_{n \geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \cdots + a(x-1) + R(x)\,,$$

et en remplaçant $R(x)$ par son développement formel, il vient l'égalité:

$$\sum_{n \geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \cdots + a(x-1) - \partial^{-1} a(x) - \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!}\, \partial^{k-1} a(x)\,.$$

Cette dernière expression justifie formellement le procédé de Ramanujan.
Le choix du développement formel:

$$R(x) = -\int_1^x a(t)\, dt - \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!}\, \partial^{k-1} a(x)$$

consiste à prendre pour $\partial^{-1} a$ la primitive de a qui s'annule en 1. Ceci revient à imposer à la solution formelle R de l'équation aux différences la condition:

$$\int_1^2 R(t)\, dt = 0\,.$$

En effet, posons $A(x) = \int_1^x a(t)\, dt$. En écrivant

$$A = (I - E)\, \frac{I}{I - E}\, A\,,$$

et en procédant comme précédemment, il vient:

$$A(x) = \int_x^{x+1} A(t)\, dt + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!}\, [\partial^{k-1} A]_x^{x+1}\,.$$

D'où :

$$A(1) = 0 = \int_1^2 A(t)\,dt + \sum_{k\geq 1} \frac{B_k}{k!}\,[\partial^{k-2}a]_1^2 = -\int_1^2 R(t)\,dt\,.$$

La condition précédente suffit pour déterminer la solution formelle de l'équation aux différences, elle ne suffit pas pour avoir l'unicité d'une solution analytique car elle laisse l'arbitraire de lui ajouter une solution périodique non constante telle que l'intégrale de 1 à 2 soit nulle. Pour résoudre ce problème nous allons faire des hypothèses supplémentaires sur la fonction a.

3. Sommation de Ramanujan et transformation de Laplace-Borel

3.1. Sommation de Ramanujan

THÉORÈME 1. *Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < 2\pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$. L'équation aux différences :*

$$R(x) - R(x+1) = a(x)$$

admet une unique solution analytique de type exponentiel $\alpha < 2\pi$ dans P, notée R_a, vérifiant la condition :

$$\int_1^2 R_a(t)\,dt = 0\,.$$

Démonstration. a) Existence. En prenant la transformée de Borel (cf. appendice) de l'équation aux différences, on obtient :

$$\mathcal{B}(R)\,(\xi) - e^{-\xi}\mathcal{B}(R)\,(\xi) = \mathcal{B}(a)\,(\xi)\,.$$

On en déduit que :

$$\mathcal{B}(R)\,(\xi) = \frac{1}{1-e^{-\xi}}\,\mathcal{B}(a)\,(\xi)\,.$$

Il suffit alors de prendre la transformée de Laplace de $\xi \mapsto \frac{1}{1-e^{-\xi}}\,\mathcal{B}(a)\,(\xi)$ pour obtenir une solution de l'équation aux différences. Celle-ci est analytique de type exponentiel α $(\alpha < 2\pi)$ dans P.

b) Unicité. Il s'agit de montrer que si f de type exponentiel $\alpha < 2\pi$ est solution de l'équation $f(x) - f(x+1) = 0$, alors f est constante. Il est clair