

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 43 (1997)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA SOMMATION DE RAMANUJAN  
**Autor:** Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.  
**Kapitel:** 2. DÉVELOPPEMENTS D'EULER-MACLAURIN FORMELS  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63274>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

qu'une série  $\sum_{n \geq 1} a(n)$  admet *une et une seule* somme de Ramanujan, celle-ci étant définie comme la valeur en 1 de l'unique solution de l'équation aux différences  $R(x) - R(x+1) = a(x)$  vérifiant la condition:  $\int_1^2 R(t) dt = 0$  (cf. §3). Ceci permet de développer dans ce cadre les propriétés de cette sommation (cf. §4) et d'établir un lien avec l'interpolation de Newton (cf. §6).

Il convient de noter que le procédé de Ramanujan *n'est pas un procédé de sommation au sens usuel*: si la série  $\sum_{n \geq 1} a(n)$  converge au sens habituel, sa somme de Cauchy (c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles de la série) ne coïncide pas en général avec la somme de la série au sens de Ramanujan (cf. §3.1, exemple 2). Les liens existant entre les deux procédés de sommation sont explicités au paragraphe 3.2.

## 2. DÉVELOPPEMENTS D'EULER-MACLAURIN FORMELS

Soit  $a$  une fonction analytique dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ . Dans cette partie, on considère la série

$$\sum_{n \geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \dots$$

comme une expression formelle. Soit  $R(x)$  le «reste de la série à l'ordre  $x$ » défini formellement par:

$$R(x) = \sum_{n \geq 0} a(n+x) = a(x) + a(x+1) + \dots$$

Par définition de  $R$ , on a:

$$\sum_{n \geq 1} a(n) = R(1),$$

et la «fonction»  $R$  est solution formelle de l'équation aux différences:

$$R(x) - R(x+1) = a(x).$$

Soit  $E$  l'opérateur de translation défini par  $Ef(x) = f(x+1)$ , que l'on peut encore écrire grâce à la formule de Taylor:  $E = e^{\partial}$ ,  $\partial := \partial_x$  désignant l'opérateur de dérivation ordinaire. Si  $I$  désigne l'opérateur d'identité, l'équation aux différences précédente peut s'écrire à l'aide des opérateurs  $E$  et  $I$  sous la forme:

$$(I - E)R = a.$$

En inversant, on obtient:

$$R = \frac{I}{I - E} a,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$R = -\frac{\partial}{e^{\partial} - I} \partial^{-1} a.$$

Le développement de Taylor formel :

$$\frac{\partial}{e^{\partial} - I} = I + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} \partial^k$$

permet alors d'obtenir ce que nous appellerons le développement formel de  $R$  :

$$R(x) = -\partial^{-1} a(x) - \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} \partial^{k-1} a(x).$$

Par définition de  $R$ , on a :

$$\sum_{n \geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \cdots + a(x-1) + R(x),$$

et en remplaçant  $R(x)$  par son développement formel, il vient l'égalité :

$$\sum_{n \geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \cdots + a(x-1) - \partial^{-1} a(x) - \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} \partial^{k-1} a(x).$$

Cette dernière expression justifie formellement le procédé de Ramanujan.

Le choix du développement formel :

$$R(x) = -\int_1^x a(t) dt - \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} \partial^{k-1} a(x)$$

consiste à prendre pour  $\partial^{-1} a$  la primitive de  $a$  qui s'annule en 1. Ceci revient à imposer à la solution formelle  $R$  de l'équation aux différences la condition :

$$\int_1^2 R(t) dt = 0.$$

En effet, posons  $A(x) = \int_1^x a(t) dt$ . En écrivant

$$A = (I - E) \frac{I}{I - E} A,$$

et en procédant comme précédemment, il vient :

$$A(x) = \int_x^{x+1} A(t) dt + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} [\partial^{k-1} A]_x^{x+1}.$$

D'où :

$$A(1) = 0 = \int_1^2 A(t) dt + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} [\partial^{k-2} a]_1^2 = - \int_1^2 R(t) dt.$$

La condition précédente suffit pour déterminer la solution formelle de l'équation aux différences, elle ne suffit pas pour avoir l'unicité d'une solution analytique car elle laisse l'arbitraire de lui ajouter une solution périodique non constante telle que l'intégrale de 1 à 2 soit nulle. Pour résoudre ce problème nous allons faire des hypothèses supplémentaires sur la fonction  $a$ .

### 3. SOMMATION DE RAMANUJAN ET TRANSFORMATION DE LAPLACE-BOREL

#### 3.1. SOMMATION DE RAMANUJAN

**THÉORÈME 1.** *Soit  $x \mapsto a(x)$  une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ . L'équation aux différences :*

$$R(x) - R(x+1) = a(x)$$

*admet une unique solution analytique de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  dans  $P$ , notée  $R_a$ , vérifiant la condition :*

$$\int_1^2 R_a(t) dt = 0.$$

*Démonstration.* a) Existence. En prenant la transformée de Borel (cf. appendice) de l'équation aux différences, on obtient :

$$\mathcal{B}(R)(\xi) - e^{-\xi} \mathcal{B}(R)(\xi) = \mathcal{B}(a)(\xi).$$

On en déduit que :

$$\mathcal{B}(R)(\xi) = \frac{1}{1 - e^{-\xi}} \mathcal{B}(a)(\xi).$$

Il suffit alors de prendre la transformée de Laplace de  $\xi \mapsto \frac{1}{1 - e^{-\xi}} \mathcal{B}(a)(\xi)$  pour obtenir une solution de l'équation aux différences. Celle-ci est analytique de type exponentiel  $\alpha$  ( $\alpha < 2\pi$ ) dans  $P$ .

b) Unicité. Il s'agit de montrer que si  $f$  de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  est solution de l'équation  $f(x) - f(x+1) = 0$ , alors  $f$  est constante. Il est clair