Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN
Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.
Kapitel: 3.1. Sommation de Ramanujan
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

D'où :

$$A(1) = 0 = \int_1^2 A(t)\,dt + \sum_{k\geq 1} \frac{B_k}{k!}\,[\partial^{k-2} a]_1^2 = -\int_1^2 R(t)\,dt\,.$$

La condition précédente suffit pour déterminer la solution formelle de l'équation aux différences, elle ne suffit pas pour avoir l'unicité d'une solution analytique car elle laisse l'arbitraire de lui ajouter une solution périodique non constante telle que l'intégrale de 1 à 2 soit nulle. Pour résoudre ce problème nous allons faire des hypothèses supplémentaires sur la fonction a.

3. Sommation de Ramanujan et transformation de Laplace-Borel

3.1. Sommation de Ramanujan

Théorème 1. *Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < 2\pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$. L'équation aux différences :*

$$R(x) - R(x+1) = a(x)$$

admet une unique solution analytique de type exponentiel $\alpha < 2\pi$ dans P, notée R_a, vérifiant la condition :

$$\int_1^2 R_a(t)\,dt = 0\,.$$

Démonstration. a) Existence. En prenant la transformée de Borel (cf. appendice) de l'équation aux différences, on obtient :

$$\mathcal{B}(R)\,(\xi) - e^{-\xi}\mathcal{B}(R)\,(\xi) = \mathcal{B}(a)\,(\xi)\,.$$

On en déduit que :

$$\mathcal{B}(R)\,(\xi) = \frac{1}{1-e^{-\xi}}\,\mathcal{B}(a)\,(\xi)\,.$$

Il suffit alors de prendre la transformée de Laplace de $\xi \mapsto \frac{1}{1-e^{-\xi}}\,\mathcal{B}(a)\,(\xi)$ pour obtenir une solution de l'équation aux différences. Celle-ci est analytique de type exponentiel α $(\alpha < 2\pi)$ dans P.

b) Unicité. Il s'agit de montrer que si f de type exponentiel $\alpha < 2\pi$ est solution de l'équation $f(x) - f(x+1) = 0$, alors f est constante. Il est clair que la condition d'analyticité de f dans le demi-plan P et la périodicité de f impliquent que f est entière. La périodicité de f permet d'écrire

$$f(x) = g(e^{2i\pi x}),$$

où la fonction g est la fonction analytique dans $\mathbf{C} - \{0\}$ définie par $g(z) = f\left(\frac{1}{2i\pi}\ln(z)\right)$. Le développement de Laurent de g en 0 se traduit par le développement de Fourier de f :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2i\pi nx},$$

où les coeffficients c_n sont donnés par les formules intégrales:

$$c_n = \frac{1}{r^n}\int_1^2 f\left(t + \frac{1}{2i\pi}\ln(r)\right) e^{-2i\pi nt}\,dt \quad \text{pour tout} \quad r > 0\,.$$

La condition f de type exponentiel $\alpha < 2\pi$ permet de majorer les $|c_n|$:

$$|c_n| \leq \frac{1}{r^n}\, Ce^{\frac{(\alpha+\epsilon)}{2\pi}|\ln(r)|} \quad \text{avec} \quad \frac{(\alpha+\epsilon)}{2\pi} < 1\,.$$

Il suffit de faire tendre r vers 0 et vers $+\infty$ pour obtenir $c_n = 0$ pour tout $n \neq 0$. La condition de nullité de l'intégrale sur $[1,2]$ implique alors $c_0 = 0$. $\square$

REMARQUE 1. D'après la démonstration du théorème précédent, la fonction R_a peut s'écrire:

$$R_a(x) = \int_\gamma e^{-x\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}}\right)\mathcal{B}(a)(\xi)\,d\xi + C_0\,,$$

où la constante C_0 dépend du représentant choisi pour $\mathcal{B}(a)$ (qui n'est définie qu'à l'addition près d'une fonction analytique dans $\mathbf{C}$ de type exponentiel). D'après les propriétés de la transformation de Borel, la fonction

$$x \mapsto -\int_\gamma e^{-x\xi}\frac{1}{\xi}\mathcal{B}(a)(\xi)\,d\xi$$

est une primitive de a. On peut donc écrire:

$$R_a(x) = -\int_1^x a(t)\,dt + \int_\gamma e^{-x\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right)\mathcal{B}(a)(\xi)\,d\xi + C_1\,.$$

Cette dernière intégrale sur γ ne dépend plus du choix de $\mathcal{B}(a)$. En écrivant:

$$\int_1^x a(t)\,dt = \int_\gamma e^{-x\xi}\frac{-1}{\xi}\mathcal{B}(a)(\xi)\,d\xi - \int_\gamma e^{-\xi}\frac{-1}{\xi}\mathcal{B}(a)(\xi)\,d\xi\,,$$

on vérifie facilement que la condition de nullité sur l'intégrale de R_a sur $[1,2]$ se traduit par $C_1 = 0$. Finalement on a:

$$R_a(x) = -\int_1^x a(t)\,dt + \int_\gamma e^{-x\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right)\mathcal{B}(a)(\xi)\,d\xi\,.$$

Si l'on suppose en outre que le mineur $\widehat{a}$ existe (cf. appendice §7.4), on peut écrire la fonction R_a sous la forme d'une intégrale sur $[0,+\infty[$:

$$R_a(x) = -\int_1^x a(t)\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-x\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right)\widehat{a}(\xi)\,d\xi\,.$$

En particulier, on a alors:

$$R_a(1) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right)\widehat{a}(\xi)\,d\xi\,.$$

DÉFINITION 1. Soit $x \mapsto a(x)$ une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$. On appelle somme de Ramanujan de la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ et on note $\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)$ le nombre $R_a(1)$.

REMARQUE 2. On pourrait définir, pour une fonction a analytique de type exponentiel $\alpha < 2\pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, la somme de Ramanujan de la série comme la valeur en 1 de la fonction R_a :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = R_a(1)\,.$$

Cependant pour $\alpha \geq \pi$ ce procédé de sommation ne vérifierait pas:

$$a(n) = b(n) \text{ pour tout entier } n \geq 1 \quad \text{implique} \quad \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n)\,,$$

comme le montre l'exemple suivant (cf. exemple 5):

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \sin(n\pi) = \frac{1}{\pi} \quad \text{alors que} \quad \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} 0 = 0\,.$$

En fait, pour a et b de type exponentiel $\alpha < \pi$, la condition: $a(n) = b(n)$ pour tout entier $n \geq 1$ implique $a = b$ d'après le théorème d'unicité de l'interpolation de Carlson (cf. [Bo] p. 153).

EXEMPLE 1. Soit $a(x) = \frac{1}{x}$. On a $\widehat{a}(\xi) = 1$. D'après la remarque 1, il vient:

$$R_a(x) = -\ln(x) + \int_0^{+\infty} e^{-x\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) d\xi = -\psi(x),$$

où l'on utilise la notation habituelle $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$. En particulier:

$$R_a(1) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) d\xi = \gamma,$$

où γ désigne la constante d'Euler. D'après la définition de la somme de Ramanujan, il vient:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = \gamma.$$

EXEMPLE 2. La fonction ζ d'Hurwitz (cf. [C]), définie pour $\Re(x) > 0$ et $\Re(z) > 1$ par

$$\zeta(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \quad \text{(somme de Cauchy)},$$

vérifie l'équation aux différences:

$$\zeta(x,z) - \zeta(x+1,z) = \frac{1}{x^z},$$

ainsi que l'égalité

$$\int_1^2 \zeta(x,z)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^z}\,dt = \frac{1}{z-1}.$$

Pour

$$a(x) = \frac{1}{x^z},$$

on a donc:

$$R_a(x) = \zeta(x,z) - \frac{1}{z-1}.$$

On en déduit pour $\Re(z) > 1$, la somme de Ramanujan:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1},$$

avec

$$\zeta(z) = \zeta(1,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Par ailleurs, on a $\widehat{a}(\xi) = \frac{\xi^{z-1}}{\Gamma(z)}$. D'où l'expression de la somme de Ramanujan sous forme d'intégrale :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \xi^{z-1}\, d\xi\,.$$

REMARQUE 3. Le choix de la normalisation $\int_1^2 R_a(t)\,dt = 0$ permet d'écrire :

$$\lim_{z\to 1^+} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \lim_{z\to 1^+} \frac{1}{n^z} = \gamma\,.$$

EXEMPLE 3. Soit k un entier ≥ 0. La fonction $R\colon x \mapsto -\frac{B_{k+1}(x)}{k+1}$, où $B_k(x)$ désigne le k-ième polynôme de Bernoulli, vérifie l'équation aux différences :

$$R(x) - R(x+1) = x^k\,,$$

ainsi que l'égalité :

$$\int_1^2 R(x)\,dx = -\frac{1}{k+1}\,.$$

Pour $a(x) = x^k$, on a donc :

$$R_a(x) = \frac{1 - B_{k+1}(x)}{k+1}\,.$$

On en déduit les sommes de Ramanujan :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \frac{1 - B_{k+1}}{k+1} \quad (k \geq 1)\,,$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} 1 = \frac{1}{2}\,.$$

EXEMPLE 4. La fonction $R\colon x \mapsto -\ln\bigl(\Gamma(x)\bigr)$ vérifie l'équation aux différences :

$$R(x) - R(x+1) = \ln(x)\,,$$

ainsi que l'égalité

$$\int_1^2 \ln\bigl(\Gamma(t)\bigr)\,dt = -1 + \frac{1}{2}\ln(2\pi)\,.$$

Pour $a(x) = \ln(x)$, on a donc :

$$R_a(x) = -\ln\big(\Gamma(x)\big) - 1 + \frac{1}{2}\ln(2\pi)\,.$$

On en déduit la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \ln(n) = -1 + \frac{1}{2}\ln(2\pi)\,.$$

EXEMPLE 5. Soit α tel que $0 < |\alpha| < \pi$, on a :

$$e^{\alpha x} - e^{\alpha(x+1)} = e^{\alpha x}(1 - e^{\alpha})\,,$$

$$\int_1^2 e^{\alpha x}\,dx = (e^{\alpha} - 1)\,\frac{e^{\alpha}}{\alpha}\,\cdot$$

Il en résulte que pour $a(x) = e^{\alpha x}$, on a :

$$R_a(x) = \frac{e^{\alpha x}}{1 - e^{\alpha}} + \frac{e^{\alpha}}{\alpha}\,\cdot$$

Par conséquent :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} e^{\alpha n} = e^{\alpha}\left(\frac{1}{1 - e^{\alpha}} + \frac{1}{\alpha}\right)\,\cdot$$

En particulier, en prenant $\alpha = it$, et en séparant partie réelle et imaginaire, il vient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \sin(nt) = \frac{1}{2}\cot\frac{t}{2} - \frac{\cos t}{t}\,,$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \cos(nt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin t}{t}\,\cdot$$

PROPOSITION 3.1. *Pour $\Re(x) > 0$, on définit $\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+x)$ par :*

$$\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+x) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+x-1)\,.$$

On a la relation :

$$R_a(x) = \sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+x) - \int_1^x a(t)\,dt\,.$$

Démonstration. On considère la fonction $b(y) = a(y+x-1)$. On a:

$$R_b(y) = R_a(y+x-1) - \int_1^2 R_a(t+x-1)\,dt = R_a(y+x-1) - \int_x^{x+1} R_a(t)\,dt\,.$$

D'où

$$R_b(1) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+x-1) = R_a(x) - \int_x^{x+1} R_a(t)\,dt\,.$$

Or $\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} R_a(t)\,dt = -a(x)$, et le résultat en découle. □

EXEMPLE 6.

$$\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+x} = \ln(x) - \psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) d\xi\,.$$

3.2. Liens avec la sommation de Cauchy

Dans ce paragraphe, a désigne une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$.

PROPOSITION 3.2. *Si $R_a(x)$ tend vers une limite finie quand $x \to \infty$, alors la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ converge au sens de Cauchy, et en notant $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ sa somme de Cauchy, on a la relation:*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \lim_{N\to\infty}\int_1^N a(t)\,dt\,.$$

Démonstration. Soit N un entier naturel > 1. En sommant pour $n = 1,\dots,N-1$ l'équation:

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n)\,,$$

il vient:

$$R_a(1) - R_a(N) = a(1) + \cdots + a(N-1)\,.$$

D'où:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + R_a(N)\,.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient la relation: