

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 43 (1997)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA SOMMATION DE RAMANUJAN  
**Autor:** Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.  
**Kapitel:** 3.1. Sommation de Ramanujan  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63274>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

D'où :

$$A(1) = 0 = \int_1^2 A(t) dt + \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k!} [\partial^{k-2} a]_1^2 = - \int_1^2 R(t) dt.$$

La condition précédente suffit pour déterminer la solution formelle de l'équation aux différences, elle ne suffit pas pour avoir l'unicité d'une solution analytique car elle laisse l'arbitraire de lui ajouter une solution périodique non constante telle que l'intégrale de 1 à 2 soit nulle. Pour résoudre ce problème nous allons faire des hypothèses supplémentaires sur la fonction  $a$ .

### 3. SOMMATION DE RAMANUJAN ET TRANSFORMATION DE LAPLACE-BOREL

#### 3.1. SOMMATION DE RAMANUJAN

**THÉORÈME 1.** *Soit  $x \mapsto a(x)$  une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ . L'équation aux différences :*

$$R(x) - R(x+1) = a(x)$$

*admet une unique solution analytique de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  dans  $P$ , notée  $R_a$ , vérifiant la condition :*

$$\int_1^2 R_a(t) dt = 0.$$

*Démonstration.* a) Existence. En prenant la transformée de Borel (cf. appendice) de l'équation aux différences, on obtient :

$$\mathcal{B}(R)(\xi) - e^{-\xi} \mathcal{B}(R)(\xi) = \mathcal{B}(a)(\xi).$$

On en déduit que :

$$\mathcal{B}(R)(\xi) = \frac{1}{1 - e^{-\xi}} \mathcal{B}(a)(\xi).$$

Il suffit alors de prendre la transformée de Laplace de  $\xi \mapsto \frac{1}{1 - e^{-\xi}} \mathcal{B}(a)(\xi)$  pour obtenir une solution de l'équation aux différences. Celle-ci est analytique de type exponentiel  $\alpha$  ( $\alpha < 2\pi$ ) dans  $P$ .

b) Unicité. Il s'agit de montrer que si  $f$  de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  est solution de l'équation  $f(x) - f(x+1) = 0$ , alors  $f$  est constante. Il est clair

que la condition d'analyticité de  $f$  dans le demi-plan  $P$  et la périodicité de  $f$  impliquent que  $f$  est entière. La périodicité de  $f$  permet d'écrire

$$f(x) = g(e^{2i\pi x}),$$

où la fonction  $g$  est la fonction analytique dans  $\mathbf{C} - \{0\}$  définie par  $g(z) = f\left(\frac{1}{2i\pi} \ln(z)\right)$ . Le développement de Laurent de  $g$  en 0 se traduit par le développement de Fourier de  $f$  :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{2i\pi n x},$$

où les coefficients  $c_n$  sont donnés par les formules intégrales :

$$c_n = \frac{1}{r^n} \int_1^2 f\left(t + \frac{1}{2i\pi} \ln(r)\right) e^{-2i\pi n t} dt \quad \text{pour tout } r > 0.$$

La condition  $f$  de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  permet de majorer les  $|c_n|$  :

$$|c_n| \leq \frac{1}{r^n} C e^{\frac{(\alpha + \epsilon)}{2\pi} |\ln(r)|} \quad \text{avec} \quad \frac{(\alpha + \epsilon)}{2\pi} < 1.$$

Il suffit de faire tendre  $r$  vers 0 et vers  $+\infty$  pour obtenir  $c_n = 0$  pour tout  $n \neq 0$ . La condition de nullité de l'intégrale sur  $[1, 2]$  implique alors  $c_0 = 0$ .  $\square$

REMARQUE 1. D'après la démonstration du théorème précédent, la fonction  $R_a$  peut s'écrire :

$$R_a(x) = \int_{\gamma} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} \right) \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi + C_0,$$

où la constante  $C_0$  dépend du représentant choisi pour  $\mathcal{B}(a)$  (qui n'est définie qu'à l'addition près d'une fonction analytique dans  $\mathbf{C}$  de type exponentiel). D'après les propriétés de la transformation de Borel, la fonction

$$x \mapsto - \int_{\gamma} e^{-x\xi} \frac{1}{\xi} \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi$$

est une primitive de  $a$ . On peut donc écrire :

$$R_a(x) = - \int_1^x a(t) dt + \int_{\gamma} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi + C_1.$$

Cette dernière intégrale sur  $\gamma$  ne dépend plus du choix de  $\mathcal{B}(a)$ . En écrivant :

$$\int_1^x a(t) dt = \int_{\gamma} e^{-x\xi} \frac{-1}{\xi} \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi - \int_{\gamma} e^{-\xi} \frac{-1}{\xi} \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi,$$

on vérifie facilement que la condition de nullité sur l'intégrale de  $R_a$  sur  $[1, 2]$  se traduit par  $C_1 = 0$ . Finalement on a :

$$R_a(x) = - \int_1^x a(t) dt + \int_{\gamma} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi.$$

Si l'on suppose en outre que le mineur  $\hat{a}$  existe (cf. appendice §7.4), on peut écrire la fonction  $R_a$  sous la forme d'une intégrale sur  $[0, +\infty[$  :

$$R_a(x) = - \int_1^x a(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \hat{a}(\xi) d\xi.$$

En particulier, on a alors :

$$R_a(1) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \hat{a}(\xi) d\xi.$$

**DÉFINITION 1.** Soit  $x \mapsto a(x)$  une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ . On appelle somme de Ramanujan de la série  $\sum_{n \geq 1} a(n)$  et on note  $\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)$  le nombre  $R_a(1)$ .

**REMARQUE 2.** On pourrait définir, pour une fonction  $a$  analytique de type exponentiel  $\alpha < 2\pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ , la somme de Ramanujan de la série comme la valeur en 1 de la fonction  $R_a$  :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = R_a(1).$$

Cependant pour  $\alpha \geq \pi$  ce procédé de sommation ne vérifierait pas :

$$a(n) = b(n) \text{ pour tout entier } n \geq 1 \text{ implique } \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n),$$

comme le montre l'exemple suivant (cf. exemple 5) :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sin(n\pi) = \frac{1}{\pi} \text{ alors que } \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} 0 = 0.$$

En fait, pour  $a$  et  $b$  de type exponentiel  $\alpha < \pi$ , la condition :  $a(n) = b(n)$  pour tout entier  $n \geq 1$  implique  $a = b$  d'après le théorème d'unicité de l'interpolation de Carlson (cf. [Bo] p. 153).

EXEMPLE 1. Soit  $a(x) = \frac{1}{x}$ . On a  $\widehat{a}(\xi) = 1$ . D'après la remarque 1, il vient :

$$R_a(x) = -\ln(x) + \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi = -\psi(x),$$

où l'on utilise la notation habituelle  $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ . En particulier :

$$R_a(1) = \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi = \gamma,$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler. D'après la définition de la somme de Ramanujan, il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = \gamma.$$

EXEMPLE 2. La fonction  $\zeta$  d'Hurwitz (cf. [C]), définie pour  $\Re(x) > 0$  et  $\Re(z) > 1$  par

$$\zeta(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^z} \quad (\text{somme de Cauchy}),$$

vérifie l'équation aux différences :

$$\zeta(x, z) - \zeta(x+1, z) = \frac{1}{x^z},$$

ainsi que l'égalité

$$\int_1^2 \zeta(x, z) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^z} dt = \frac{1}{z-1}.$$

Pour

$$a(x) = \frac{1}{x^z},$$

on a donc :

$$R_a(x) = \zeta(x, z) - \frac{1}{z-1}.$$

On en déduit pour  $\Re(z) > 1$ , la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1},$$

avec

$$\zeta(z) = \zeta(1, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Par ailleurs, on a  $\widehat{a}(\xi) = \frac{\xi^{z-1}}{\Gamma(z)}$ . D'où l'expression de la somme de Ramanujan sous forme d'intégrale :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left( \frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \xi^{z-1} d\xi.$$

REMARQUE 3. Le choix de la normalisation  $\int_1^2 R_a(t) dt = 0$  permet d'écrire :

$$\lim_{z \rightarrow 1^+} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{1}{n^z} = \gamma.$$

EXEMPLE 3. Soit  $k$  un entier  $\geq 0$ . La fonction  $R: x \mapsto -\frac{B_{k+1}(x)}{k+1}$ , où  $B_k(x)$  désigne le  $k$ -ième polynôme de Bernoulli, vérifie l'équation aux différences :

$$R(x) - R(x+1) = x^k,$$

ainsi que l'égalité :

$$\int_1^2 R(x) dx = -\frac{1}{k+1}.$$

Pour  $a(x) = x^k$ , on a donc :

$$R_a(x) = \frac{1 - B_{k+1}(x)}{k+1}.$$

On en déduit les sommes de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \frac{1 - B_{k+1}}{k+1} \quad (k \geq 1),$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} 1 = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLE 4. La fonction  $R: x \mapsto -\ln(\Gamma(x))$  vérifie l'équation aux différences :

$$R(x) - R(x+1) = \ln(x),$$

ainsi que l'égalité

$$\int_1^2 \ln(\Gamma(t)) dt = -1 + \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

Pour  $a(x) = \ln(x)$ , on a donc :

$$R_a(x) = -\ln(\Gamma(x)) - 1 + \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

On en déduit la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \ln(n) = -1 + \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

EXEMPLE 5. Soit  $\alpha$  tel que  $0 < |\alpha| < \pi$ , on a :

$$e^{\alpha x} - e^{\alpha(x+1)} = e^{\alpha x}(1 - e^{\alpha}),$$

$$\int_1^2 e^{\alpha x} dx = (e^{\alpha} - 1) \frac{e^{\alpha}}{\alpha}.$$

Il en résulte que pour  $a(x) = e^{\alpha x}$ , on a :

$$R_a(x) = \frac{e^{\alpha x}}{1 - e^{\alpha}} + \frac{e^{\alpha}}{\alpha}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} e^{\alpha n} = e^{\alpha} \left( \frac{1}{1 - e^{\alpha}} + \frac{1}{\alpha} \right).$$

En particulier, en prenant  $\alpha = it$ , et en séparant partie réelle et imaginaire, il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sin(nt) = \frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} - \frac{\cos t}{t},$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \cos(nt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin t}{t}.$$

PROPOSITION 3.1. Pour  $\Re(x) > 0$ , on définit  $\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+x)$  par :

$$\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+x) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+x-1).$$

On a la relation :

$$R_a(x) = \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+x) - \int_1^x a(t) dt.$$

*Démonstration.* On considère la fonction  $b(y) = a(y + x - 1)$ . On a :

$$R_b(y) = R_a(y + x - 1) - \int_1^2 R_a(t + x - 1) dt = R_a(y + x - 1) - \int_x^{x+1} R_a(t) dt.$$

D'où

$$R_b(1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n + x - 1) = R_a(x) - \int_x^{x+1} R_a(t) dt.$$

Or  $\frac{d}{dx} \int_x^{x+1} R_a(t) dt = -a(x)$ , et le résultat en découle.  $\square$

EXEMPLE 6.

$$\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n + x} = \ln(x) - \psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi.$$

### 3.2. LIENS AVEC LA SOMMATION DE CAUCHY

Dans ce paragraphe,  $a$  désigne une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ .

PROPOSITION 3.2. *Si  $R_a(x)$  tend vers une limite finie quand  $x \rightarrow \infty$ , alors la série  $\sum_{n \geq 1} a(n)$  converge au sens de Cauchy, et en notant  $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$  sa somme de Cauchy, on a la relation :*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N a(t) dt.$$

*Démonstration.* Soit  $N$  un entier naturel  $> 1$ . En sommant pour  $n = 1, \dots, N - 1$  l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n + 1) = a(n),$$

il vient :

$$R_a(1) - R_a(N) = a(1) + \dots + a(N - 1).$$

D'où :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \dots + a(N - 1) + R_a(N).$$

En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient la relation :