Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN

Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.

Kapitel: 4. Propriétés de la sommation

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

En particulier, on a la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \int_1^{\infty} a(t)\,dt\,.$$

Démonstration. La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x)\,dx$ vérifie clairement les trois conditions qui caractérisent la fonction R_a. De plus, on a :

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 a(n+x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} a(t)\,dt = \int_1^{\infty} a(t)\,dt\,. \quad \square$$

EXEMPLE 8. En appliquant la proposition précédente à la fonction $x \mapsto \frac{xy}{e^{xy}-1}$ avec $y > 0$, il vient la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{ny}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y}\int_y^{\infty} \frac{t}{e^t-1}\,dt\,.$$

4. PROPRIÉTÉS DE LA SOMMATION

4.1. LINÉARITÉ

Si a et b sont deux fonctions analytiques de type exponentiel $\alpha_a < \pi$ et $\alpha_b < \pi$ respectivement dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, alors pour tout λ, μ dans $\mathbf{C}$, $\lambda a + \mu b$ est une fonction analytique de type exponentiel (majoré par) $\alpha := \mathrm{Max}(\alpha_a, \alpha_b) < \pi$ dans le demi-plan P et on a :

$$R_{\lambda a + \mu b} = \lambda R_a + \mu R_b\,.$$

Il en résulte que l'application qui à une série $\sum a(n)$ associe sa somme de Ramanujan est $\mathbf{C}$-linéaire.

4.2. TRANSLATION

Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P, alors pour tout entier $N > 1$ la translatée $E^N(a)$ est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P et on a la

PROPOSITION 4.1. *Pour tout entier $N > 1$,*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + \sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t)\,dt\,.$$

Démonstration. En sommant pour $n = 1, \ldots, N-1$ l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n)\,,$$

il vient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + R_a(N)\,.$$

Il suffit alors (cf. proposition 3.1) de remplacer $R_a(N)$ par $\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t)\,dt$. □

EXEMPLE 9. Pour $N \geq 2$, on a :

$$\gamma = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+N}\,.$$

4.3. DÉRIVATION

Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P, alors sa dérivée ∂a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P. De plus, en dérivant l'équation aux différences, on obtient la relation :

$$R_{\partial a} = \partial(R_a) + a(1)\,,$$

où le terme $a(1)$ provient du fait que $\int_1^2 \partial(R_a)(t)\,dt = R_a(2) - R_a(1) = -a(1)$. Plus généralement, on montre par récurrence sur n que

$$R_{\partial^n a} = \partial^n(R_a) + \partial^{n-1}a(1)\,.$$

4.4. SOMMATION PAR PARTIES

Si a et b sont deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_a < \pi$ et $\alpha_b < \pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, alors le produit ab est analytique de type exponentiel $\alpha \leq \alpha_a + \alpha_b$ dans le demi-plan P. Soient alors u et v deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_u < \pi$ et $\alpha_v < \pi$ dans le demi-plan P avec $\alpha_u + \alpha_v < \pi$. D'après les propriétés de linéarité et de translation vues aux paragraphes précédents, on a :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \big(u(n) - u(n+1)\big)\, v(n)$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} u(n+1)\,\big(v(n+1) - v(n)\big) + u(1)\,v(1) - \int_1^2 u(t)\,v(t)\,dt\,.$$

Cette formule est pour la sommation de Ramanujan l'analogue de la classique formule de sommation par parties d'Abel. En particulier en remplaçant u par R_a, on obtient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,v(n) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} R_a(n+1)\,\big(v(n+1) - v(n)\big) + R_a(1)\,v(1) - \int_1^2 R_a(t)\,v(t)\,dt\,.$$

En remplaçant à présent v par R_b dans la formule précédente, on obtient alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,R_b(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n)\,R_a(n)$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,b(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) - \int_1^2 R_a(t)\,R_b(t)\,dt\,,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{1}^{n} b(k) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) \sum_{1}^{n} a(k)$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,b(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) + \int_1^2 R_a(t)\,R_b(t)]\,dt\,. \tag{1}$$

Cette dernière formule admet deux cas particuliers intéressants :

PROPOSITION 4.2.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{1}^{n} \partial a(k) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) \sum_{1}^{n} a(k)$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,\partial a(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) + \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,.$$

Démonstration. En appliquant la formule (1) avec $b(x) = \partial a(x)$, et en utilisant la propriété de dérivation vue au §4.3, il vient:

$$\int_1^2 R_a(t)\, R_{\partial a}(t)\, dt = \int_1^2 R_a(t)\, \partial R_a(t)\, dt = \frac{1}{2}[R_a^2]_1^2 = \frac{1}{2}a(1)^2 - a(1) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,. \quad \square$$

PROPOSITION 4.3.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_{1}^{n} a(k) = \frac{3}{2} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n a(n) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial^{-1} a(n)\,,$$

avec $\partial^{-1} a(x) = \int_1^x a(t)\, dt$.

Démonstration. En appliquant la formule (1) avec $b(x) = 1$, on obtient:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n a(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_{1}^{n} a(k) + \int_1^2 t R_a(t)\, dt = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,.$$

Posons $A(x) = \int_1^x a(t)\, dt$. On a $\partial R_A = R_a$ de sorte que (en intégrant par parties)

$$\int_1^2 t R_a(t)\, dt = R_A(1)\,.$$

La proposition en résulte. $\square$

EXEMPLE 10. (Sommes harmoniques: cf. [B1] pp. 251–253, [AV], [BB]).

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} H_n = \frac{3}{2} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} 1 - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \ln(n) = \frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi)\,,$$

$$2 \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1 + \gamma^2 + \int_1^2 \psi^2(t)\, dt\,,$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \gamma\zeta(2)\,,$$

avec:

$$H_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

REMARQUE 5. D'après la formule :

$$\int_0^1 t^{n-1} Li_2(t)\, dt = \zeta(2)\frac{1}{n} - \frac{H_n}{n^2},$$

où Li_2 désigne le dilogarithme (cf. [L] p. 20), on obtient en sommant :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right) Li_2(t)\, dt = \gamma\zeta(2) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2}\,.$$

Il en découle, d'après l'exemple précédent, la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right) Li_2(t)\, dt\,.$$

4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

PROPOSITION 4.4. *Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi/2$ dans le demi-plan $\{x \mid \Re(x) > 0\}$, on a :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - a(1) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt\,.$$

Démonstration. D'après l'équation aux différences vérifiée par R_a, on peut écrire :

$$R_a(2x) - R_a(2x+1) = a(2x)\,,$$
$$R_a(2x+1) - R_a\big(2(x+1)\big) = a(2x+1)\,.$$

En ajoutant, on obtient :

$$R_a(2x) - R_a\big(2(x+1)\big) = a(2x) + a(2x+1)\,.$$

On a donc :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \big(a(2n) + a(2n+1)\big) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt\,.$$

Par la propriété de linéarité, il vient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt\,,$$

et de plus, $R_a(2) = R_a(1) - a(1)$. □

EXEMPLE 11.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\big(\gamma + \ln(2)\big) - 1 + \frac{1}{2}\ln(3)\,.$$

4.6. UTILISATIONS DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 4.5. *Si a est la fonction entière de type exponentiel $\tau < \pi$ définie par :*

$$a(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \quad \textit{avec} \quad |\alpha_k| \leq C\tau^k\,,$$

alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \int_0^1 a(t)\,dt - \frac{1}{2}\alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}\,.$$

Démonstration. Montrons que $R_a = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} R_{x^k}$. On sait que $R_{x^k} = \frac{1-B_{k+1}(x)}{k+1}$. Considérons la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)\,.$$

En utilisant la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n\,,$$

on constate que pour $\tau < r < \pi$, il existe une constante C_r telle que pour tout x, on ait

$$|B_{k+1}(x)| \leq C_r r^{-k} e^{r|x|}\,(k+1)!$$

Ceci permet de vérifier que la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)$$

vérifie les trois conditions qui caractérisent R_a. □

EXEMPLE 12. Pour $0 < y < \pi$, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$:

$$\frac{\sin(xy)}{x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} y^{2k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x} \, dx - \frac{1}{2} y .$$

REMARQUE 6. La série précédente converge également au sens de Cauchy, et la relation de la proposition 3.3 s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)}{n} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} + \int_y^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx - \frac{1}{2} y = \frac{\pi - y}{2} .$$

REMARQUE 7. La proposition précédente ne s'applique pas si l'on ne suppose pas la fonction a entière. Par exemple, si on l'appliquait à la fonction $x \mapsto \frac{x^{2q+1} y}{e^{xy} - 1}$ avec q entier > 0 et $y > 0$, le développement en série entière :

$$x^{2q} \frac{xy}{e^{xy} - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} x^{2q} x^k y^k \quad (|x| < 2\pi)$$

permettrait d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1} y}{e^{ny} - 1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1} \, dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4} y .$$

En fait, cette formule n'est pas valable car d'après l'exemple 8 (cf. § 3.2), on a la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1} y}{e^{ny} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1} y}{e^{ny} - 1} - \frac{1}{y^{2q+1}} \int_y^{\infty} \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1} \, dt ,$$

ce qui donnerait :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1} y}{e^{ny} - 1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1} \, dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4} y .$$

Or, cette relation est fausse, comme on le voit en faisant tendre y vers l'infini. Remarquons que pour $y = 2\pi$ et $q = 2p$, la relation précédente donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{2} - \frac{1}{4\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{4p+2} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

alors que l'on a (cf. [B2] p. 256 et p. 262) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{4} - \frac{1}{8\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{8p+4} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

PROPOSITION 4.6. *Soit $f(x) = \sum_{k\geq 1} c_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 1$. On suppose que la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P, alors :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} f(1/n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^k} = c_1\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right) .$$

Démonstration. Posons $a(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On a le développement convergent à l'infini :

$$a(x) = \sum_{n\geq 1} c_n \frac{1}{x^n} .$$

Le mineur de a est donc la fonction entière de type exponentiel $1/\rho < 1$:

$$\widehat{a}(\xi) = \sum_{k\geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} .$$

Par définition de la somme de Ramanujan, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) \widehat{a}(\xi)\, d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) \sum_{k\geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}\, d\xi . \end{aligned}$$

L'hypothèse $\rho > 1$ permet de majorer les $|c_k|$ et ainsi de permuter les signes $\int$ et $\sum$ dans la formule précédente. Il vient alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}\, d\xi . \qquad \square$$

EXEMPLE 13. Le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto xe^{-zx}$:

$$xe^{-zx} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k x^{k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{z}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right) .$$

4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

PROPOSITION 4.7. *Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $a(z,x)$ analytique dans $D \times P$. On suppose que pour tout compact $K \subset D$, il existe des constantes C_K et $\tau_K < \pi$ telles que pour tout $x \in P$ avec $|x| > 1$ et tout $z \in K$ on ait $|a(z,x)| \leq C_K e^{\tau_K |x|}$. Alors $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n)$ est analytique dans D. De plus, on a:*

$$\partial_z \left(\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n) \right) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial_z a(z,n) .$$

Démonstration. On sait (cf. appendice) qu'on peut choisir un représentant de la transformée de Borel de a tel que pour tout $z \in K \subset D$ (où K est un compact quelconque), on ait $|\mathcal{B}(a)(z,x)| \leq Ce^{k|z|}$ avec $0 < k < 1$. Soit $R_a(z,1) = \int_\gamma e^{-\xi} \left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) \mathcal{B}(a)(\xi)\, d\xi$. Cette intégrale dépend analytiquement du paramètre z, la fonction à intégrer étant majorée uniformément en $z \in K$ par une fonction intégrable. □

COROLLAIRE 4.1. *La fonction $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est une fonction entière. Pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$, on a:*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1},$$

$$-\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)}{n^z} = \zeta'(z) + \frac{1}{(z-1)^2} .$$

Démonstration. Le fait que $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est analytique dans $\mathbf{C}$ est une conséquence immédiate de la proposition précédente. La première égalité étant vérifiée pour $\Re(z) > 1$, par prolongement analytique elle est donc vraie pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$. La seconde égalité s'obtient par dérivation par rapport à z. $\square$

REMARQUE 8. Les formules précédentes restent valables pour $z = 1$ en remplaçant les membres de droite par leurs limites en 1, et on a le développement (cf. [B1] p. 164) :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^k \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)^k}{n}\,.$$

5. EXEMPLES D'UTILISATION

5.1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION ψ

La fonction ψ vérifie l'équation :

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}\,.$$

Par ailleurs, d'après l'exemple 6 (cf. §3.1), on a pour $\Re(z) > -1$:

$$\psi(1+z) = \ln(1+z) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z}\,.$$

Supposons $|z| < 1$ et posons $f(x) = \frac{x}{1+xz}$, on a

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} f\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Le développement en série entière en 0 de la fonction f :

$$\frac{x}{1+xz} = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} z^{k-1} x^k\,,$$

de rayon de convergence $\rho = \frac{1}{|z|} > 1$, permet d'écrire la somme de Ramanujan de cette série sous la forme :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \gamma + \sum_{k\geq 1} (-1)^k z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right)\,.$$

On en déduit le développement de ψ :

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{k\geq 2} (-1)^{k-1} \zeta(k)\, z^{k-1}\,.$$