

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN
Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.
Kapitel: 4.4. Sommation par parties
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63274>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PROPOSITION 4.1. *Pour tout entier $N > 1$,*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t) dt.$$

Démonstration. En sommant pour $n = 1, \dots, N-1$ l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n),$$

il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + R_a(N).$$

Il suffit alors (cf. proposition 3.1) de remplacer $R_a(N)$ par $\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t) dt$. \square

EXEMPLE 9. Pour $N \geq 2$, on a :

$$\gamma = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+N}.$$

4.3. DÉRIVATION

Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P , alors sa dérivée ∂a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P . De plus, en dérivant l'équation aux différences, on obtient la relation :

$$R_{\partial a} = \partial(R_a) + a(1),$$

où le terme $a(1)$ provient du fait que $\int_1^2 \partial(R_a)(t) dt = R_a(2) - R_a(1) = -a(1)$. Plus généralement, on montre par récurrence sur n que

$$R_{\partial^n a} = \partial^n(R_a) + \partial^{n-1}a(1).$$

4.4. SOMMATION PAR PARTIES

Si a et b sont deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_a < \pi$ et $\alpha_b < \pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, alors le produit ab est analytique de type exponentiel $\alpha \leq \alpha_a + \alpha_b$ dans le demi-plan P . Soient alors u et v deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_u < \pi$ et $\alpha_v < \pi$ dans le demi-plan P avec $\alpha_u + \alpha_v < \pi$. D'après

les propriétés de linéarité et de translation vues aux paragraphes précédents, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} (u(n) - u(n+1)) v(n) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} u(n+1) (v(n+1) - v(n)) + u(1)v(1) - \int_1^2 u(t)v(t) dt. \end{aligned}$$

Cette formule est pour la sommation de Ramanujan l'analogue de la classique formule de sommation par parties d'Abel. En particulier en remplaçant u par R_a , on obtient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)v(n) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} R_a(n+1) (v(n+1) - v(n)) + R_a(1)v(1) - \int_1^2 R_a(t)v(t) dt.$$

En remplaçant à présent v par R_b dans la formule précédente, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)R_b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n)R_a(n) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) - \int_1^2 R_a(t)R_b(t) dt, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_1^n b(k) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) \sum_1^n a(k) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)b(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) + \int_1^2 R_a(t)R_b(t) dt. \end{aligned}$$

Cette dernière formule admet deux cas particuliers intéressants :

PROPOSITION 4.2.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_1^n \partial a(k) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) \sum_1^n a(k) \\ = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \partial a(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) + \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n). \end{aligned}$$

Démonstration. En appliquant la formule (1) avec $b(x) = \partial a(x)$, et en utilisant la propriété de dérivation vue au §4.3, il vient :

$$\int_1^2 R_a(t) R_{\partial a}(t) dt = \int_1^2 R_a(t) \partial R_a(t) dt = \frac{1}{2} [R_a^2]_1^2 = \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n). \quad \square$$

PROPOSITION 4.3.

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_1^n a(k) = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial^{-1} a(n),$$

avec $\partial^{-1} a(x) = \int_1^x a(t) dt$.

Démonstration. En appliquant la formule (1) avec $b(x) = 1$, on obtient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_1^n a(k) + \int_1^2 tR_a(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n).$$

Posons $A(x) = \int_1^x a(t) dt$. On a $\partial R_A = R_a$ de sorte que (en intégrant par parties)

$$\int_1^2 tR_a(t) dt = R_A(1).$$

La proposition en résulte. \square

EXEMPLE 10. (Sommes harmoniques : cf. [B1] pp. 251–253, [AV], [BB]).

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} H_n = \frac{3}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} 1 - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \ln(n) = \frac{3}{2} \gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi),$$

$$2 \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1 + \gamma^2 + \int_1^2 \psi^2(t) dt,$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \gamma \zeta(2),$$

avec :

$$H_n = \sum_1^n \frac{1}{k}.$$

REMARQUE 5. D'après la formule :

$$\int_0^1 t^{n-1} Li_2(t) dt = \zeta(2) \frac{1}{n} - \frac{H_n}{n^2},$$

où Li_2 désigne le dilogarisme (cf. [L] p. 20), on obtient en sommant :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) Li_2(t) dt = \gamma \zeta(2) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2}.$$

Il en découle, d'après l'exemple précédent, la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) Li_2(t) dt.$$

4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

PROPOSITION 4.4. Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi/2$ dans le demi-plan $\{x \mid \Re(x) > 0\}$, on a :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - a(1) - \int_1^2 R_a(2t) dt.$$

Démonstration. D'après l'équation aux différences vérifiée par R_a , on peut écrire :

$$\begin{aligned} R_a(2x) - R_a(2x+1) &= a(2x), \\ R_a(2x+1) - R_a(2(x+1)) &= a(2x+1). \end{aligned}$$

En ajoutant, on obtient :

$$R_a(2x) - R_a(2(x+1)) = a(2x) + a(2x+1).$$

On a donc :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} (a(2n) + a(2n+1)) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t) dt.$$

Par la propriété de linéarité, il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t) dt,$$

et de plus, $R_a(2) = R_a(1) - a(1)$. \square