Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN

Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.

Kapitel: 4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

EXEMPLE 13. Le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto xe^{-zx}$:

$$xe^{-zx} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k x^{k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{z}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) .$$

4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

PROPOSITION 4.7. *Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $a(z,x)$ analytique dans $D \times P$. On suppose que pour tout compact $K \subset D$, il existe des constantes C_K et $\tau_K < \pi$ telles que pour tout $x \in P$ avec $|x| > 1$ et tout $z \in K$ on ait $|a(z,x)| \leq C_K e^{\tau_K |x|}$. Alors $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n)$ est analytique dans D. De plus, on a :*

$$\partial_z \left(\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n) \right) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial_z a(z,n) .$$

Démonstration. On sait (cf. appendice) qu'on peut choisir un représentant de la transformée de Borel de a tel que pour tout $z \in K \subset D$ (où K est un compact quelconque), on ait $|\mathcal{B}(a)(z,x)| \leq Ce^{k|z|}$ avec $0 < k < 1$. Soit $R_a(z,1) = \int_\gamma e^{-\xi} \left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \mathcal{B}(a)(\xi)\, d\xi$. Cette intégrale dépend analytiquement du paramètre z, la fonction à intégrer étant majorée uniformément en $z \in K$ par une fonction intégrable. □

COROLLAIRE 4.1. *La fonction $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est une fonction entière. Pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$, on a :*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1} ,$$

$$-\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)}{n^z} = \zeta'(z) + \frac{1}{(z-1)^2} .$$

Démonstration. Le fait que $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est analytique dans $\mathbf{C}$ est une conséquence immédiate de la proposition précédente. La première égalité étant vérifiée pour $\Re(z) > 1$, par prolongement analytique elle est donc vraie pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$. La seconde égalité s'obtient par dérivation par rapport à z. $\square$

REMARQUE 8. Les formules précédentes restent valables pour $z = 1$ en remplaçant les membres de droite par leurs limites en 1, et on a le développement (cf. [B1] p. 164):

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^k \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)^k}{n} .$$

5. EXEMPLES D'UTILISATION

5.1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION ψ

La fonction ψ vérifie l'équation:

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z} \cdot$$

Par ailleurs, d'après l'exemple 6 (cf. §3.1), on a pour $\Re(z) > -1$:

$$\psi(1+z) = \ln(1+z) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} \cdot$$

Supposons $|z| < 1$ et posons $f(x) = \frac{x}{1+xz}$, on a

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot$$

Le développement en série entière en 0 de la fonction f :

$$\frac{x}{1+xz} = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} z^{k-1} x^k ,$$

de rayon de convergence $\rho = \frac{1}{|z|} > 1$, permet d'écrire la somme de Ramanujan de cette série sous la forme:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \gamma + \sum_{k\geq 1} (-1)^k z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right) \cdot$$

On en déduit le développement de ψ :

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{k\geq 2} (-1)^{k-1} \zeta(k)\, z^{k-1} .$$