Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 44 (1998)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE

Autor: Colin de Verdière, Yves

Kapitel: 3. La mécanique quantique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63894

La situation géométrique est celle d'une fibration $F: E \to X$ et d'une fonction $\varphi: E \to \mathbf{R}$. Si L_0 est le graphe de $d\varphi$ contenu dans $T^\star E$, on passe de L_0 à L par la réduction symplectique associée au fibré conormal de la fibration.

En particulier, si $\mathcal{L}: TX \to \mathbf{R}$ est un lagrangien régulier et Ω_t l'ensemble des applications de $\gamma: [0,t] \to X$ fibré sur $X \times X$ par $\gamma \to (\gamma(0), \gamma(t))$ et $\Phi(\gamma) = \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \gamma'(s))ds$, la variété lagrangienne associée est le graphe du flot hamiltonien φ_t associé au lagrangien $\mathcal{L}$ par la transformée de Legendre. La fonction génératrice Φ est bien sûr reliée à l'intégrale de Feynman.

3. La mécanique quantique

Pour cette section, voir [10], [32], [39], [47], [43].

Ici l'espace des phases est un espace de Hilbert (parfois de dimension finie); pour être plus précis, c'est le projectif complexe de cet espace, mais on peut négliger ce détail.

La dynamique est donnée au moyen d'un opérateur auto-adjoint $\widehat{H}$ (avec domaine) sur $\mathcal{H}$ grâce à l'équation de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{du}{dt} = \widehat{H}u ,$$

dont le flot est le groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires donné par: $U(t) = e^{-it\widehat{H}/\hbar}$.

La constante $\hbar$ n'est pas là uniquement pour faire joli, en général $\widehat{H}$ est une énergie et donc $\hbar$ a les dimensions d'une action, car on ne peut exponentier que des quantités sans dimension !!

Exemple 3.1. *$\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^n)$ et $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$. On a alors l'équation de Schrödinger.*

Exemple 3.2. *$\mathcal{H} = L^2(X)$ et $\widehat{H} = \frac{\hbar^2}{2}\Delta_g$, où Δ_g est le laplacien riemannien. On a l'équation de Schrödinger associée au flot géodésique.*

Exemple 3.3. *Si E est le fibré anti-canonique sur $P^n\mathbf{C}$, on considère l'espace de Hilbert des sections holomorphes de $E^{\otimes N}$ qui s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré N sur $\mathbf{C}^{n+1}$.*

Si $H: P^n\mathbf{C} \to \mathbf{R}$, on considère les opérateurs de Toeplitz $\widehat{H}_N\varphi = \Pi_N(H\varphi)$, où Π_N est la projection orthogonale des sections sur les sections holomorphes. Voir [19].

La ressemblance entre les exemples de ce paragraphe et du précédent n'est pas fortuite, comme on va le voir.

Il faut aussi remarquer que la mécanique quantique est un cas particulier de la mécanique classique, celui où l'hamiltonien est une forme hermitienne sur un espace de Hilbert. De ce point de vue, il n'est pas très excitant : la dynamique est quasi-périodique, les fréquences fondamentales étant liées de façon simple au spectre de $\widehat{H}$.

Les correspondances entre espace des phases classiques et quantiques (flèches entre 2 catégories) peuvent être prolongées de façon heuristique, par exemple correspondance entre volume et dimension, entre variétés lagrangiennes et vecteurs, entre produits et produits tensoriels, entre changement de signe de ω et passage au dual.

Pour être plus pédant, on pourrait parler de la catégorie *symplectique* dont les objets sont les variétés symplectiques et les flèches de Z à Z' les sous-variétés lagrangiennes de $(Z \times Z', \omega' - \omega)$ et de la catégorie hilbertienne dont les objets sont les espaces de Hilbert et les flèches les opérateurs unitaires.

On obtient ainsi le tableau de correspondance suivant qu'il est intéressant d'essayer de prolonger !!

CLASSIQUE	QUANTIQUE
(Z, ω)	$\mathcal{H}$
$(T^\star X, \omega)$	$L^2(X)$
L *lagrangienne*	$\varphi \in \mathcal{H},\ \|\varphi\| = 1$
$L \subset (Z_1 \times Z_2, \omega_2 - \omega_1)$	$U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$
$\frac{1}{n!} \int_Z \omega^{\wedge n}$	$\dim \mathcal{H}$
$H : Z \to \mathbf{R}$	$\widehat{H}$ *autoadjoint*
$\frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x)$	$-\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$
$\frac{1}{2}\sum g^{i,j}\xi_i\xi_j$	Δ_g
φ_t	$e^{-it\frac{\widehat{H}}{\hbar}}$
Legendre	*Fourier*
Trajectoires périodiques	*Fonctions propres*
Périodes	*Spectre*